Московский государственный технический университет

Имени Н.Э. Баумана

Учебное пособие

Григорьев Ю.В., Бородулина Т.П.

Методические указания по выполнению домашнего задания на тему “Вынужденные колебания механических систем с одной степенью свободы”.

По курсу “Теория механических колебаний”

для студентов 3 курса специальности РК-5.

Содержание

1. Введение

Студенты МГТУ им. Баумана в ходе обучения на младших курсах знакомятся с темой “Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы” в курсах физики, а затем, теоретической механики. В них обычно рассматриваются системы абсолютно твердых тел под действием гармонических внешних сил.

Курс “Теория механических колебаний” для студентов специальности РК-5 нацелен в первую очередь на расчет деформируемых систем при различных видах внешнего воздействия. Отдельно изучается вопрос долговечности таких систем. Настоящие методические указания содержат как все необходимые теоретические сведения, так и подробно разобранный пример выполнения домашнего задания на указанную тему.

2. Воздействие на систему единичного импульса.

2.1. Системы без трения

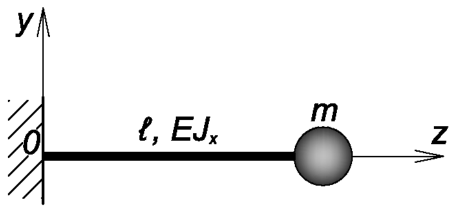


рис. 2.1

Из курса “Теория механических колебаний” известно, что малые свободные колебания системы с одной степенью свободы (рис 2.1) описываются уравнением (2.1).

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_o t \qquad (2.1)$$

где $y(t)$ - вертикальные смещения массы m;

y_0 и $\dot{y}_0$ - начальное смещение и начальная скорость массы m соответственно;

$p_o = \sqrt{\dfrac{3EI_x}{ml^3}}$ - собственная круговая частота данной системы.

Пусть на покоящуюся массу m в начальный момент $(t = 0)$ подействовал импульс I_0. Это приводит к появлению начальной скорости $\dot{y}_0 = \dfrac{I_0}{m}$. Далее система движется свободно по закону (2.2), т.е.

$$y(t) = \frac{I_0}{mp_0} \sin p_o t \qquad (2.2)$$

2.2. Системы с вязким трением

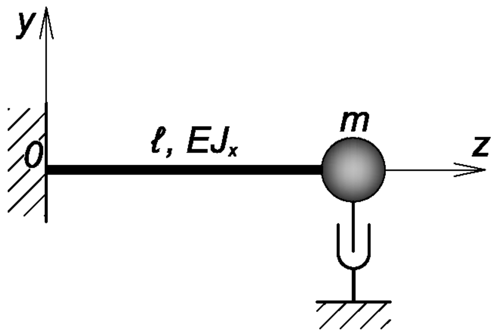


рис. 2.2

Если в системе с одной степенью свободы действует вязкое трение (рис 2.2), то её малые колебания относительно положения равновесия описываются уравнением [1].

$$y(t) = e^{-nt}\left(y_0 \cos pt + \frac{\dot{y}_0 + n y_0}{p} \sin pt \right) \qquad (2.3)$$

где $n = \dfrac{b}{2m}$ - коэффициент демпфирования;

b - коэффициент вязкого трения;

$p_o = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ - круговая частота системы с трением.

В этом случае действие импульса I_0 в начальный момент $(t = 0)$ на покоящуюся массу m вызывает колебания вида:

$$y(t) = \frac{I_0}{m p_0} e^{-nt} \sin pt \qquad (2.4)$$

3. Неустановившиеся вынужденные колебания под действием произвольной нагрузки. Интеграл Дюамеля.

В предыдущих разделах мы встречались с действием позиционных сил, сил инерции, диссипативных сил. Все они не только влияют на движение системы, но этим же движениеми управляются. В дальнейшем к этим силам добавятся внешние возмущающие силы. Они описываются функциями времени, не зависящими от самого движения системы.

3.1. Системы без трения

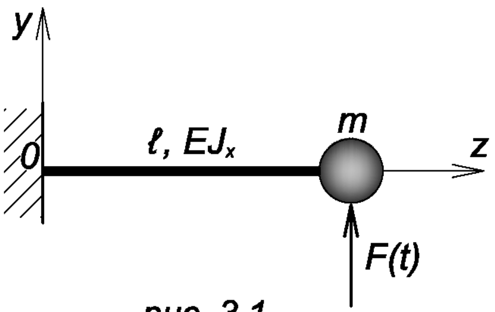


рис. 3.1

Действие на массу m произвольной силы $F(t)$ (рис. 3.1) приводит её в состояние вынужденных колебаний.

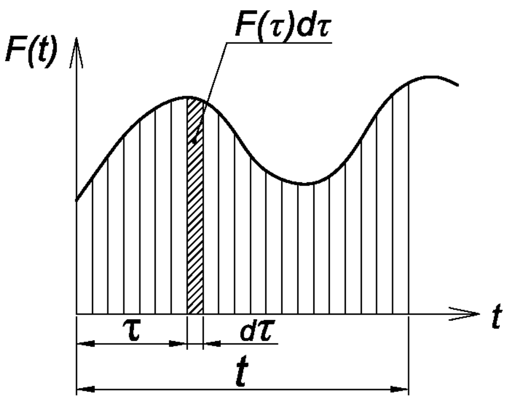


рис. 3.2

Произвольный характер изменения силы $F(t)$ (рис. 3.2) можно представить в виде непрерывной последовательности элементарных импульсов:

$$dI(\tau) = F(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

Для нахождения вклада каждого элементарного импульса в смещение массы m в заданный момент времени t $dy(t,\tau)$ можем воспользоваться выражением (2.2), но с учётом реального времени его действия на систему $(t-\tau)$

$$dy(t,\tau) = \frac{F(\tau)d\tau}{mp_0}\sin p_o(t-\tau) \qquad (3.2)$$

Суммарное действие элементарных импульсов за время t составит:

$$y(t) = \frac{1}{mp_0}\int_0^t F(\tau)\sin p_0(t-\tau)d\tau \quad (3.3)$$

Полученный результат называется интегралом Дюамеля. Если помимо внешней силы $F(t)$ заданы ещё и начальные смещения y_0 и скорость $\dot{y}_0$ массы m, то её малые колебания описываются полным уравнением:

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{1}{m p_0} \int_0^t F(\tau) \sin p_0 (t-\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Пример

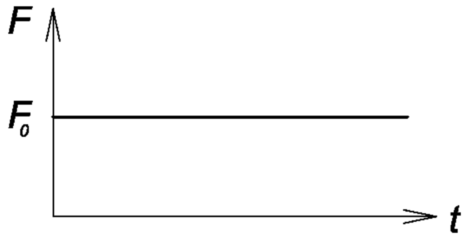


рис. 3.3

Для примера рассмотрим действие внезапно приложенной постоянной силы F_0 к покоящейся массе m (рис. 3.3). Из условия задачи начальные смещение и скорость при

$t = 0$: $y_0 = 0$; $\dot{y}_0 = 0$.

Тогда

$$y(t) = \frac{F_0}{m p_0} \int_0^t \sin p_0 (t-\tau) d\tau = -\frac{F_0}{m p_0^2} \int_0^t \sin p_0 (t-\tau) d p_0 (t-\tau) =$$

$$= \frac{F_0}{m p_0^2} (1 - \cos p_0 t); \qquad (3.5)$$

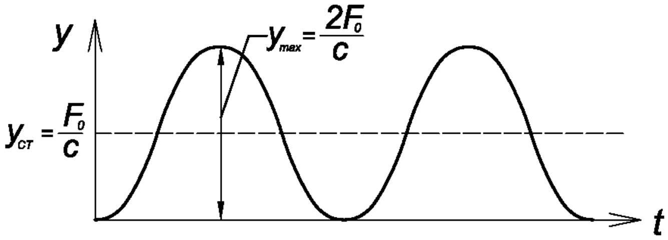


рис. 3.4

График соответствующей зависимости $y(t)$ показан на рис. 3.4. Здесь $c = \frac{3EJ_x}{l^3}$ - изгибная жёсткость консольной балки. Таким образом, $y_{CT} = \frac{F_0}{c}$ - прогиб конца балки в случае статического приложения силы F_0. Внезапное приложение такой же силы вызывает вдвое большие прогибы (рис. 3.4).

$$y_{\max} = \frac{2F_0}{c} \qquad (3.6)$$

3.2. Системы с вязким трением

При наличии в системе вязкого трения (рис. 2.2) отдельный начальный импульс вызывает движение массы m по закону (2.4).

Рассмотрим действие на такую систему произвольной внешней силы $F(t)$ (рис. 3.2). Как и в предыдущем разделе, представим процесс $F(t)$ как непрерывную последовательность элементарных импульсов $dI(\tau)$ (3.1). Каждый элементарный импульс $dI(\tau)$ вызывает смещение массы m в данный момент t (2.4) с учётом времени его действия $(t-\tau)$:

$$dy_0(t,\tau) = \frac{F(\tau)d\tau}{mp} e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) \qquad (3.7)$$

Суммируя действие элементарных импульсов за время t, получим окончательный закон движения массы m:

$$y(t) = \frac{1}{mp_0}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau)d\tau = \frac{e^{-nt}}{mp}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau)d\tau \quad (3.8)$$

При наличии начального смещения y_0 и начальной скорости $\dot{y}_0$ массы полное уравнение её малых колебаний имеет вид:

$$y(t) = e^{-nt}\left(y_0 \cos pt + \frac{\dot{y}_0 + ny_0}{p} \sin pt \right) + \frac{e^{-nt}}{mp}\int_0^t F(\tau)e^{n\tau} \sin p(t-\tau)d\tau =$$

$$= e^{-nt}\left(y_0 \cos pt + \frac{\dot{y}_0 + ny_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)e^{n\tau} \sin p(t-\tau)d\tau \right) \quad (3.2)$$

4. Установившиеся вынужденные колебания систем

4.1. Воздействие гармонической внешней силы

4.1.1. Системы без трения

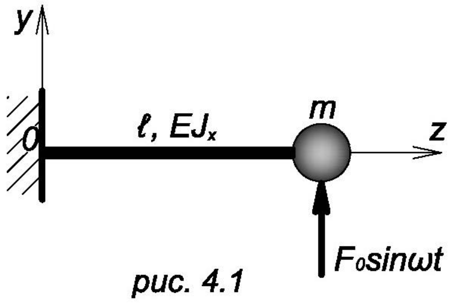


рис. 4.1

Рассмотрим действие на систему гармонической возмущающей силы $F_0 \cos\omega t$ (рис. 4.1), где F_0 и ω - соответственно амплитуда и частота возмущающей силы. Уравнение вынужденных колебаний массы m имеет вид [1].

$$\ddot{y} + p_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad (4.1)$$

При нулевых начальных условиях $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$ получаем решение вида:

$$y(t) = \frac{F_0}{m(p_0^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{p_0}\sin p_0 t\right) \qquad (4.2)$$

Разность двух гармонических движений приводит к биениям. На практике в системе всегда присутствуют силы трения и второе слагаемое постепенно затухает.

Колебания становятся моногармоническими с частотой ω:

$$y(t) = \frac{F_0 c}{m(p_0^2 - \omega^2)c}\sin\omega t = \frac{F_0}{c}\frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}}\sin\omega t = A\sin\omega t \qquad (4.3)$$

Где амплитуда $A = k_{дин} \cdot A_{CT}$; $A_{CT} = \dfrac{F_0}{c}$ и $k_{дин} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}}$;

$k_{дин}$ - Коэффициент динамичности (рис.4.2)

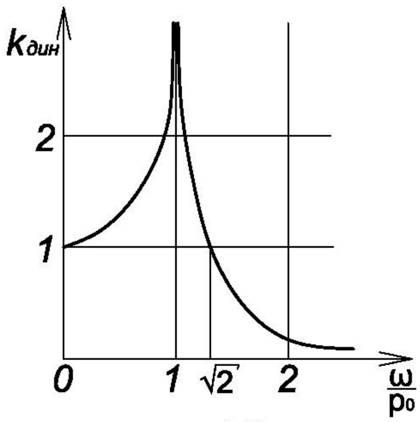


рис. 4.2

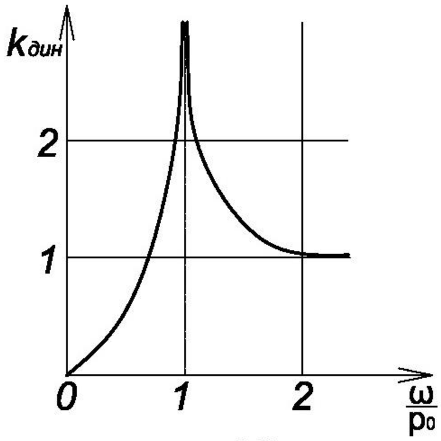


рис. 4.3

Зачастую возмущающая сила создаётся неуравновешенной движущейся массой M (е – эксцентриситет). Тогда $F_0 = Me\omega^2$.

В этом случае

$$A = \frac{F_0}{m(p_0^2 - \omega^2)} = \frac{Me}{m}\frac{\omega^2}{p_0^2 - \omega^2} = \frac{Me}{m}\frac{\dfrac{\omega^2}{p_0^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}} \qquad (4.4)$$

Таким образом,

$$k_{дин} = \frac{\dfrac{\omega^2}{p_0^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}} \text{ (рис 4.3)} \qquad (4.5)$$

4.1.2. Системы с вязким трением.

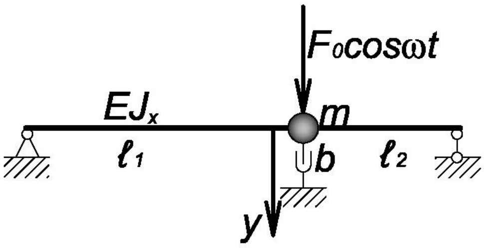


рис. 4.5

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$y = e^{-nt}(C_1\cos pt + C_2\sin pt) + y_{част}$$

,

где $p = \sqrt{p_0^2 - n^2}$

Общее решение однородного уравнения быстро затухает.

Рассмотрим установившиеся колебания. Частное решение ищем в виде:

$$y_{част} = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$$

$$\dot{y}_{част} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t;$$

$$\ddot{y}_{част} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t.$$

Подставим $y_{част}$, $\dot{y}_{част}$, $\ddot{y}_{част}$ в исходное уравнение.

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t - 2nA\omega\sin\omega t + 2nB\omega\cos\omega t + p_0^2 A\cos\omega t +$$

$$+ p_0^2 B\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t;$$

$$\begin{cases} A(p_0^2 - \omega^2) + B\cdot 2n\omega = \dfrac{F_0}{m} \\ -A\cdot 2n\omega + B(p_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{\dfrac{F_0}{m}(p_0^2 - \omega^2)}{(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \qquad B = \frac{\dfrac{F_0}{m}\cdot 2n\omega}{(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2};$$

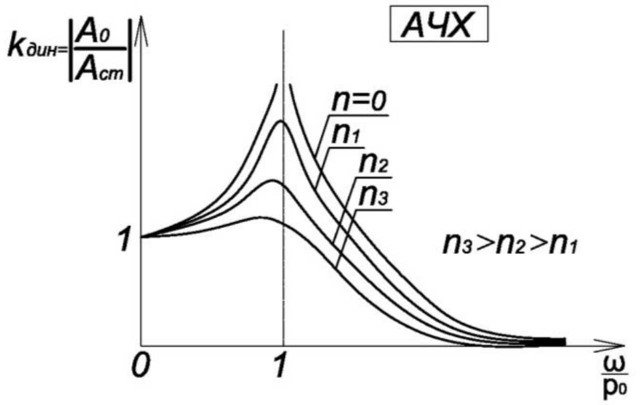
Перейдём к амплитудной форме записи:

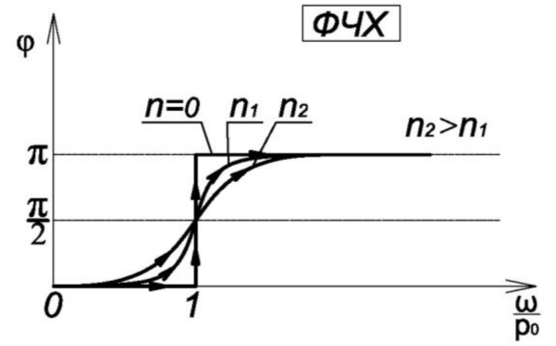
$$y_{част} = A\cos\omega t + B\sin\omega t = A_0\cos(\omega t - \varphi),$$

где $A_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \dfrac{F_0\sqrt{(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}{m(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} =$

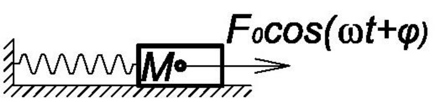
$$= \frac{F_0}{mp_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2 + \dfrac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}} = \frac{F_0}{c}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2 + \dfrac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}} k_{дин}$$

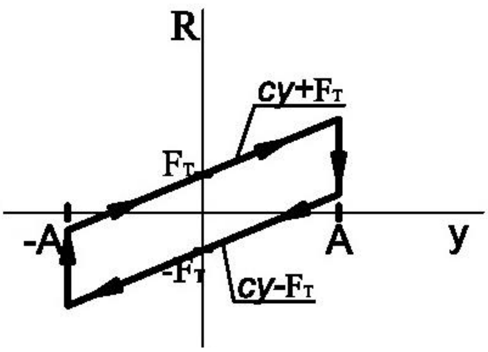
$$tg\varphi = \frac{B}{A} = \frac{2n\omega}{p_0^2 - \omega^2}$$





4.1.3. Системы с сухим трением. Точное решение.





Рассмотрим установившиеся колебания без остановок.

Уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{y} + cy + F_T sign\dot{y} = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$R = cy + F_T sign\dot{y}$$

$$x_0 = A; \quad \dot{x}_0 = 0;$$

Определяем y, который тоже меняется с частотой ω, причём время отсчитывается так, что при $t=0,\ \frac{2\pi}{\omega},\ \frac{4\pi}{\omega}$ и т.д. масса оказывается в крайнем правом положении ($y=A,\ \dot{y}=0$).

И, соответственно, в моменты $t=\frac{\pi}{\omega},\ \frac{3\pi}{\omega},\ \frac{5\pi}{\omega}$ и т.д. – в крайнем левом положении ($y=-A,\ \dot{y}=0$).

Рассмотрим движение массы справа налево, тогда:

$$m\ddot{y}+cy-F_T=F_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\ddot{y}+p_0^2y=\frac{F_T}{c}p_0^2+\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$y=C_1\cos p_0t+C_2\sin p_0t+\frac{F_T}{c}+\frac{F_0}{mp_0^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}\cos(\omega t+\varphi),$$ тогда

скорость

$$\dot{y}=-C_1p_0\sin p_0t+C_2p_0\cos p_0t-\frac{F_0}{c}\omega\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}\sin(\omega t+\varphi),$$

Неизвестные: $C_1,\ C_2,\ A,\ \varphi$

$t=0\ \rightarrow\ y=A,\ \dot{y}=0.$

1) $C_1+\frac{F_T}{c}+\frac{F_0}{c}\frac{\cos\varphi}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}=A$

2) $C_2p_0-\frac{F_0\omega}{c}\frac{\sin\varphi}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}=0$

$t=\frac{\pi}{\omega}\ \rightarrow\ y=-A,\ \dot{y}=0.$

3) $C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda+\frac{F_T}{c}+\frac{F_0}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}\cos(\pi+\varphi)=-A$

$\frac{p_0\pi}{\omega}\equiv\lambda$

4) $-C_1 p_0 \sin\lambda + C_2 p_0 \cos\lambda - \frac{F_0\omega}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}\sin(\pi+\varphi)=0$

Сложим 1-ое уравнение с 3-им, 2-ое с 4-ым, получим систему 2-ух уравнений:

$$\begin{cases} C_1(1+\cos\lambda) + C_2\sin\lambda + \frac{2F_T}{c} = 0 \\ -C_1 p_0 \sin\lambda + C_2 p_0 (1+\cos\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$C_2 = C_1\frac{\sin\lambda}{1+\cos\lambda} = C_1\frac{2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{2\cos^2\frac{\lambda}{2}} = C_1 tg\frac{\lambda}{2};$$

$$C_1(1+\cos\lambda) + C_1\frac{\sin^2\lambda}{1+\cos\lambda} = -\frac{2F_T}{c};$$

$$C_1\left[\frac{1+2\cos\lambda+\cos^2\lambda+\sin^2\lambda}{1+\cos\lambda}\right] = -\frac{2F_T}{c};$$

$$C_1 = -\frac{F_T}{c} \rightarrow C_2 = -\frac{F_T}{c} tg\frac{\lambda}{2}.$$

Подставим C_1 в 1).

$$-\frac{F_T}{c} + \frac{F_T}{c} + \frac{F_0}{c}\frac{\cos\varphi}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)} = A$$

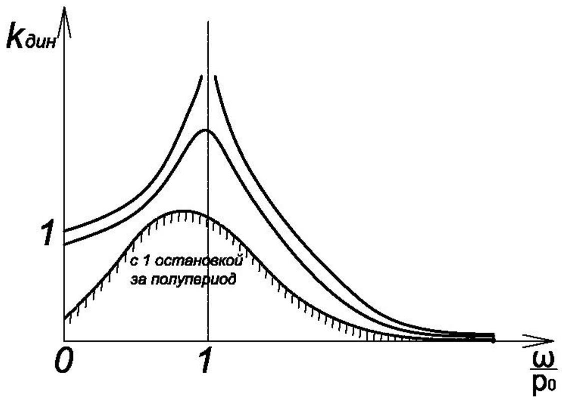
Подставим C_2 в 2).

$$-p_0\frac{F_T}{c} tg\frac{\lambda}{2} - \frac{F_0\omega}{c}\frac{\sin\varphi}{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)} = 0$$

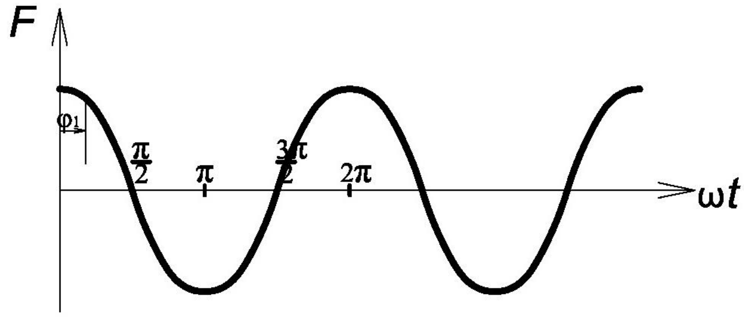
$$\sin\varphi = -\frac{p_0}{\omega}\frac{F_T}{F_0} tg\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left\{\frac{p_0}{\omega}\frac{F_T}{F_0} tg\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)\right\}^2}$$

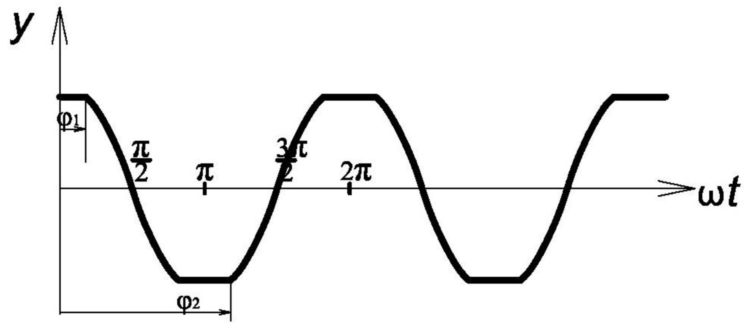
$$A = \frac{F_0}{c}\frac{\sqrt{1 - \frac{p_0}{\omega}\frac{F_T}{F_0} tg\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}$$



Движение без остановок возможно, когда упругая сила $\geq (F_0 \cos\varphi + F_T)$



Пример движения с остановками.



4.1.4. Системы с сухим трение. Приближенное решение.

$$\ddot{y} + p_0^2 y + \frac{F_T}{m} sign\dot{y} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t + \varphi)$$

Рассмотрим безостановочные колебания. Решение ищем приблизительно в виде:

$$y = A\sin\omega t$$

Подставляем его в исходное уравнение:

$$\ddot{y} + p_0^2 y + \frac{F_T}{m} sign\dot{y} - \frac{F_0}{m}\sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

или в виде оператора: $L(y) = 0$

$$L(A\sin\omega t) \neq 0, \text{ где}$$

$A\sin\omega t = \Phi(t)$ - невязка,

Невязка периодическая: $\Phi(t+T) = \Phi(t)$, разложим её в ряд Фурье:

$\Phi(t) = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t + a_2\cos 2\omega t + b_2\sin\omega t$, где

$a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \approx 80\%$ всей величины

Величина суммы $a_2\cos 2\omega t + b_2\sin\omega t$ - незначительная поправка.

Если сделать $\Phi(t) = 0$, получим точное решение. Если (главная доля $\Phi(t)$)=0, то это хорошее приближение.

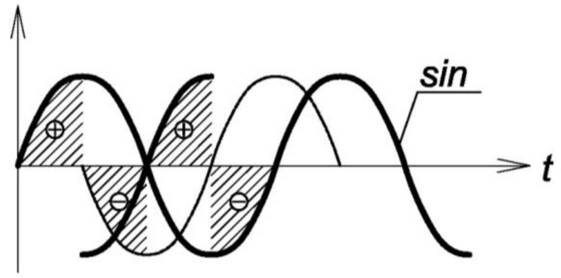
Итак, потребуем, чтобы 1-ые слагаемые разложения $\Phi(t)$ в ряд Фурье были равны нулю.

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T \Phi(t)\cos\omega t dt = 0;$$

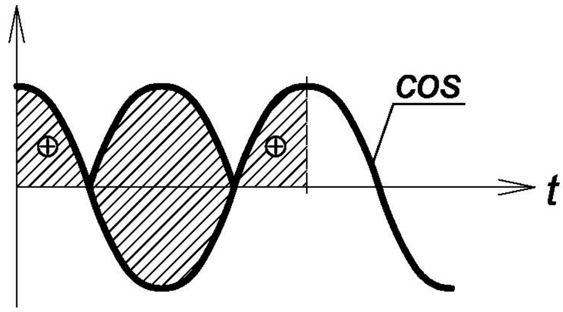
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T \Phi(t)\sin\omega t dt = 0;$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \Big[A\omega^2\sin\omega t + p_0^2 A\sin\omega t + sign(\cos\omega t)\frac{F_T}{m} - \\ - \frac{F_0}{m}\left(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi\right)\Big]\cos\omega t dt = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \Big[A\omega^2\sin\omega t + p_0^2 A\sin\omega t + sign(\cos\omega t)\frac{F_T}{m} - \\ - \frac{F_0}{m}\left(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi\right)\Big]\sin\omega t dt = 0$$



$$\int_0^T sign(\cos\omega t)\sin\omega t dt = 0 \qquad \int_0^T \sin^2\omega t dt = \frac{T}{2}$$



$$\int_0^T sign(\cos\omega t)\cos\omega t dt = 4\int_0^{T/4}\cos\omega t dt = \frac{4}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\pi/2\omega} = \frac{4}{\omega}$$

$$\frac{4\cdot 2}{\omega\cdot T} = \frac{4\cdot 2\omega}{\omega\cdot 2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_T}{m} - \dfrac{F_0}{m}\sin\varphi = 0 \\ -A\omega^2 + Ap_0^2 - \dfrac{F_0}{m}\cos\varphi = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_T}{m} = \dfrac{F_0}{m}\sin\varphi \\ Ap_0^2\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right) = \dfrac{F_0}{m}\cos\varphi \end{cases};$$

$$tg\varphi = \frac{\dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_T}{c}}{A\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right)}$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\frac{F_T}{m}\right)^2 + A^2p_0^4\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$A = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{F_0}{m}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_T}{m}\right)^2}}{p_0^2\left|1-\dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right|} \qquad A = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{F_0}{c}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_T}{c}\right)^2}}{p_0^2\left|1-\dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right|}$$

Подставим выражение для A в $tg\varphi$:

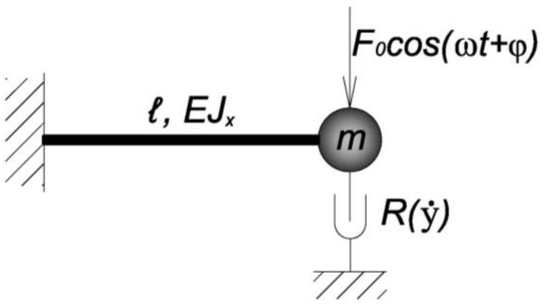
$$tg\varphi = \frac{\frac{4}{\pi}\frac{F_T}{c}}{A\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)}$$

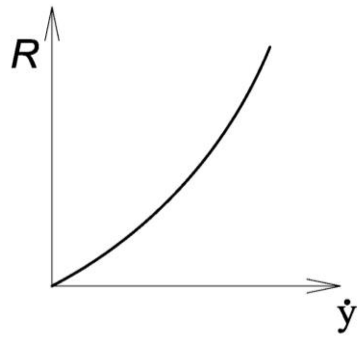
Когда возможно найденное решение?

Когда: $\frac{F_0}{c} > \frac{4}{\pi}\frac{F_T}{c}$ идут колебания без застоев.

При точном решении получается тот же результат.

4.1.5. Системы с нелинейным трением.





Запишем уравнение движения массы:

$m\ddot{y} + R(\dot{y}) + cy = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Рассмотрим установившийся режим.

$y = A\cos\omega t$,

Тогда $\dot{y} = -A\omega \sin \omega t$

Заменим нелинейную силу $R(\dot{y})$ на линейную $b_0\dot{y}$. Найдём b_0.

Приравниваем работу сил трения за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\int_0^T R(\dot{y})dy = \int_0^T b_0\dot{y}dy \qquad dy = d\dot{y}dt$$

$$-\int_0^T R(-A\omega\sin\omega t)A\omega\sin\omega t dt = b_0\int_0^T(-A\omega\sin\omega t)^2 dt$$

$$\omega t \equiv \varphi;\ \ \sin^2\omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t;$$

$$-\int_0^{2\pi} AR(-A\omega\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{b_0A^2\omega^2T}{2} = b_0A^2\omega^2\pi$$

$$b_0 = -\frac{\int_0^{2\pi} R(-A\omega\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi}{A\omega^2\pi}$$

Теперь обычное линейное трение.

4.2. Действие произвольной периодической возмущающей силы.

Рассмотрим действие негармонической, но периодической силы.

$F(t) = F(t+T)$, где T - период изменения силы.

4.2.1. Разложение $F(t)$ в ряд Фурье.

Можно разложить $F(t)$ в ряд:

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right),$$

где, как известно:

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos k\omega t dt$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin k\omega t dt .$$

Тогда основное уравнение вынужденных колебаний примет вид:

$$m\ddot{y} + cy = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right)$$

Пользуюсь принципом суперпозиции, получим:

$$y(t) = \frac{1}{c}\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t}{1 - \frac{k^2\omega^2}{p_0^2}}\right)$$

Движение, вызываемое полигармонической силой, также является полигармоническим.

Может так случиться, что k-я гармоника с небольшими A_k и B_k вызовет значительные колебания $q(t)$, если $k\omega \approx p_0$.

Всё бы хорошо, но указанные суммы очень редко быстро сходятся. Требуется большое количество слагаемых.

4.2.2. Метод Дюффинга для систем без трения.

Рассматривая установившиеся колебания под действием силы с периодом T, обычно разыскиваем решение $q(t)$ с тем же периодом. Тогда можем утверждать, что перемещения и скорости через T повторяются. Момент, принимаемый за начало отсчёта не важен.

$$q_0 = q(0) = q(T) \text{ и } \dot{q}_0 = \dot{q}(0) = \dot{q}(T)$$

Движение в интервале от 0 до T с произвольными начальными условиями имеет вид:

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{1}{m p_0} \int_0^t F(\tau) \sin p_0 (t - \tau) d\tau$$

Обобщённая скорость:

$$\dot{y}(t) = -y_0 p_0 \sin p_0 t + \dot{y}_0 \cos p_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) \cos p_0 (t - \tau) d\tau$$

Слагаемое $F(\tau) \sin p_0 (t - \tau)\Big|_{t=\tau} = 0$

Запишем $y(T)$ и $\dot{y}(T)$:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 \cos p_0 T + \dfrac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 T + \dfrac{1}{m p_0} \int\limits_0^T F(\tau) \sin p_0 (T - \tau) d\tau \\ \dot{y}(t) = -y_0 p_0 \sin p_0 T + \dot{y}_0 \cos p_0 T + \dfrac{1}{m} \int\limits_0^T F(\tau) \cos p_0 (T - \tau) d\tau \end{cases}$$

$$\sin p_0 (T - \tau) = \sin p_0 T \cos p_0 \tau - \cos p_0 T \sin p_0 \tau$$
$$\cos p_0 (T - \tau) = \cos p_0 T \cos p_0 \tau + \sin p_0 T \sin p_0 \tau$$

Обозначим получаемые интегралы по τ:

$$\int\limits_0^T F(\tau) \cos p_0 \tau d\tau \equiv C_0$$
$$\int\limits_0^T F(\tau) \sin p_0 \tau d\tau \equiv S_0$$

Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 \cos p_0 T + \dfrac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 T + \dfrac{C_0}{p_0 m} \sin p_0 T - \dfrac{S_0}{p_0 m} \cos p_0 T \\ \dot{y}(t) = -y_0 p_0 \sin p_0 T + \dot{y}_0 \cos p_0 T + \dfrac{C_0}{m} \cos p_0 T + \dfrac{S_0}{m} \sin p_0 T \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений относительно y_0 и $\dot{y}_0$, получим:

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{2 m p_0} \left(C_0 ctg \dfrac{p_0 T}{2} + S_0 \right) \\ \dot{y}(t) = \dfrac{1}{2m} \left(S_0 ctg \dfrac{p_0 T}{2} - C_0 \right) \end{cases}$$

Возвращаемся к первоначальному выражению $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2 m p_0} \left[\left(C_0 ctg \frac{p_0 T}{2} + S_0 \right) \cos p_0 T + \left(S_0 ctg \frac{p_0 T}{2} - C_0 \right) \sin p_0 T + \right.$$

$$+2\int_0^t F(\tau)\sin p_0(t-\tau)d\tau\Bigg]$$

4.2.3. Метод Дюффинга для систем с вязким трением.

Как и в предыдущем разделе примем некоторый момент за начало отсчёта. Тогда y_0 и $\dot{y}_0$ - начальная обобщённая координата и обобщённая скорость.

Тогда получим:

$$y(t)=e^{-nt}\left(\frac{\dot{y}_0+ny_0}{p}\sin pt+y_0\cos pt\right)+\frac{1}{ap}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin p(t-\tau)d\tau;$$

После дифференцирования

$$\dot{y}(t)=e^{-nt}\left(-\frac{p_0^2y_0+n\dot{y}_0}{p}\sin pt+\dot{y}_0\cos pt\right)+\frac{1}{a}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)}\cos p(t-\tau)d\tau;$$

Подставляем $(t=T)$ и в левой части заменяем $y(T)=y_0$ и $\dot{y}(T)=\dot{y}_0$, в итоге получаем 2 алгебраических уравнения:

$$y_0(e^{nT}-\cos pT)-\frac{\dot{y}_0+ny_0}{p}\sin pT=\frac{1}{ap}(C_*\sin pT-S_*\cos pT);$$

$$y_0(e^{nT}-\cos pT)-\frac{p_0^2y_0+n\dot{y}_0}{p}\sin pT=$$
$$=\frac{1}{ap}\left[(p\cos pT-n\sin pT)C_*+(p\sin pT+n\cos pT)S_*\right]$$

Здесь для краткости ввели обозначения:

$$C_* = \int_0^T F(\tau) e^{n\tau} \cos p\tau d\tau;$$

$$S_* = \int_0^T F(\tau) e^{n\tau} \sin p\tau d\tau;$$

В итоге решения системы алгебраических уравнений получим:

$$y(t) = \frac{e^{-nt}}{ap(1-2e^{nt}\cos pT + e^{2nT})}\left\{\left[e^{nT}\left(C_* \sin pT - S_* \cos pT\right) + S_*\right]\cos pt +\right.$$

$$\left. + \left[e^{nT}(C_* \cos pT + S_* \sin pT) - C_*\right]\sin pt\right\} + \frac{1}{ap}\int F(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) d\tau$$

Пример: Действие периодических импульсов I_0 через $T_{сек}$.

Для этого частного случая $C_* = I_0;\ S_* = 0$ и получим:

$$q(t) = \frac{I_0 e^{n(t-T)}(\sin p(T-t) + e^{nT} \sin pt)}{ap(1-2e^{nT}\cos pT + e^{2nT}}$$

4.3. Виброизоляция систем с одной степенью свободы.

Коэффициент передачи силы.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 4.6.

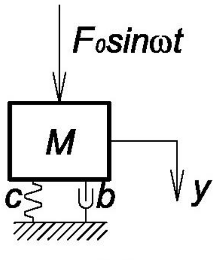


рис. 4.6

$$y = \frac{F_0}{c} k_{дин} \sin(\omega t - \varphi);$$

где $k_{дин} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2 + \dfrac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}}$

$$\dot{y} = \frac{F_0}{c} k_{дин} \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

Пружина передаёт на основание силу cx, а демпфер - $b\dot{x}$, таким образом: $R = b\dot{x} + cx$ - сила, передаваемая на основание.

$$2n = \frac{b}{m}\frac{c}{c} = \frac{bp_0^2}{c} \rightarrow b = \frac{2nc}{p_0^2}$$

$$R = \frac{2nc}{p_0^2}\frac{F_0}{c}k_{дин}\omega\cos(\omega t-\varphi) + c\frac{F_0}{c}k_{дин}\sin(\omega t-\varphi) =$$

$$= F_0 k_{дин}\left\{\sin(\omega t-\varphi) + \frac{2n\omega}{p_0^2}\cos(\omega t-\varphi)\right\}$$

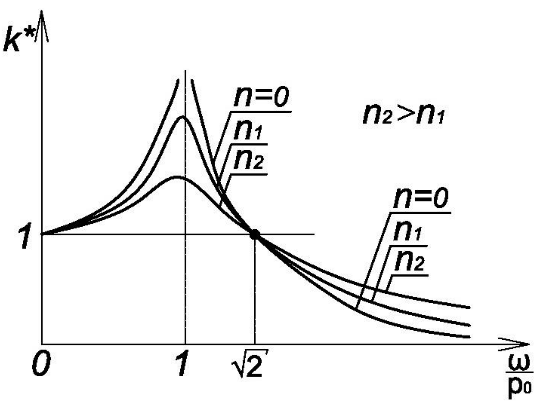
Приведём к амплитудной форме:

$$R = F_0 k_{дин}\sqrt{1+\frac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}\sin(\omega t-\varphi+\gamma)$$, тогда

$$R_{max} = F_0 k_{дин}\sqrt{1+\frac{4n^2\omega^2}{p_0^4}} = k^* \cdot F_0$$, где $k^* = k_{дин}\sqrt{1+\frac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}$

$$k^* = \frac{R_{\max}}{F_0} = \frac{\sqrt{1+\frac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{p_0^2}\right)^2+\frac{4n^2\omega^2}{p_0^4}}};$$

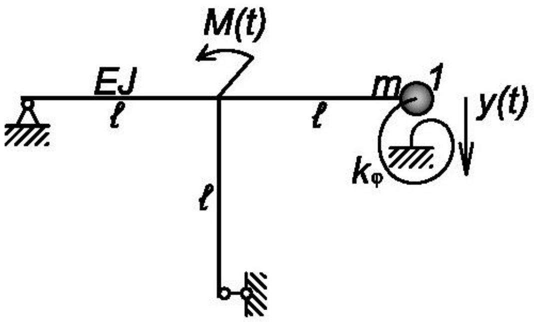
k^* - коэффициент передачи силы.



Вязкое трение увеличивает амплитуду при $\omega > p_0\sqrt{2}$

5. Пример выполнения домашнего задания на тему “Вынужденные колебания механических систем с одной степенью свободы”.

Дано:



$l = 1м$, $E=200ГПа$, $J=1\ см^4$, $m=10\ кг.$

$T = k\pi / p$, $F = 100H$, $M = 0.1Fl$

$$k_\varphi = \frac{8EJ}{l}$$

Найти:

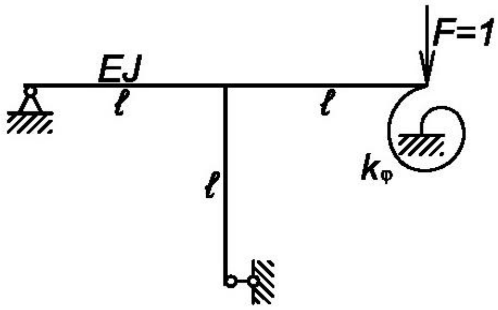
1. Определить собственную частоту системы.
2. Методом Дюффинга рассчитать закон движения системы $y(t)$ при заданном $M(t)$.

Решение:

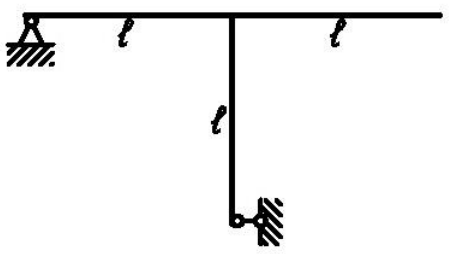
I. Найдём собственную частоту системы p_0.

$M(t) = 0$.

$p_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{1}{\delta_{11}^{\Sigma} m}}$, где δ_{11}^{Σ} - податливость системы, перемещение сечения 1, вызванное единичной силой, приложенной в этом же сечении.



Система один раз статически неопределима. Раскроем статическую неопределимость. Чтобы получить основную систему снимем одну лишнюю связь (пружину кручения).

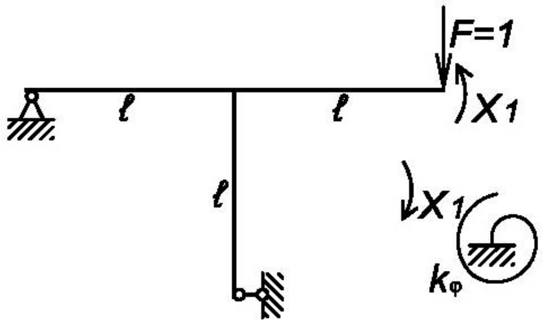


Основная система

Основная система, нагруженная *F=1* и неизвестным моментом *X1*, заменяющим отброшенную связь, становится эквивалентной системой, если будет выполнено условие:

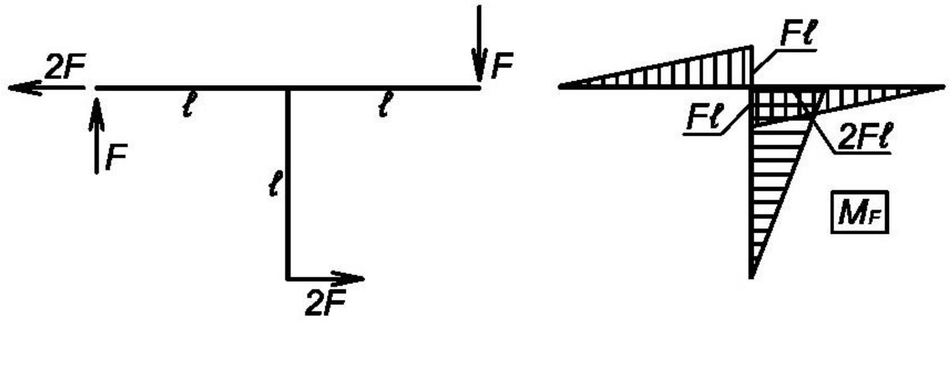
$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = -\dfrac{X_1}{k_\varphi}$, где $\dfrac{X_1}{k_\varphi}$ - поворот сечения пружины, откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11} + \dfrac{1}{k_\varphi}};$$

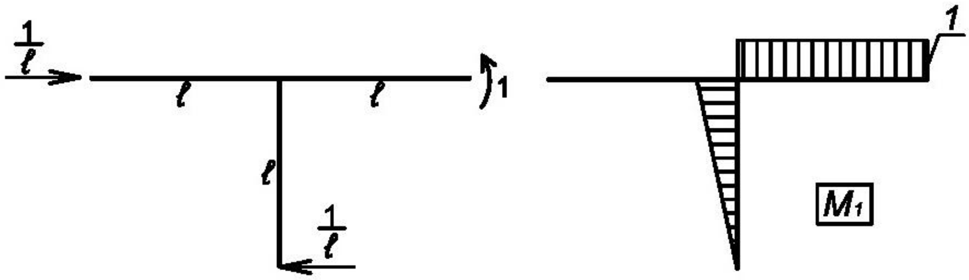


Эквивалентная система

Нагрузим основную систему силой *F* и построим эпюру изгибающего момента *MF*.



Нагрузим основную систему единичным моментом вместо *X1* и построим эпюру изгибающего момента *M1:*



Коэффициенты δ_{1F} и δ_{11} канонического уравнения вычисляем с помощью интеграла Мора, используя способ Верещагина.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left[1l \cdot 1 + \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}\frac{l}{EJ}$$

$$\delta_{1F} = -\frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} \cdot Fl \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3}\right] = -\frac{7}{6}\frac{Fl^2}{EJ}$$

$$X_1 = -\frac{-\frac{7}{6}\frac{Fl^2}{EJ}}{\frac{4l}{3EJ} + \frac{l}{8EJ}} = \frac{7 \cdot 24 Fl}{6 \cdot 35} = \frac{4}{5} Fl$$

Статическая неопределимость раскрыта, построим суммарную эпюру изгибающих моментов в раме.

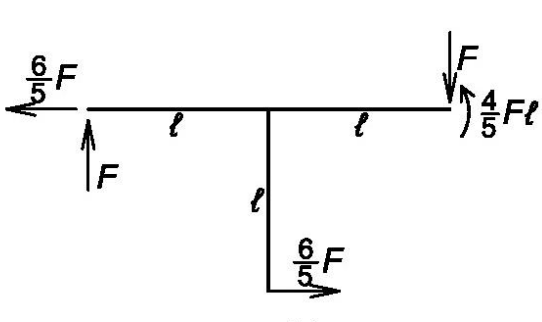


рис. 5.1

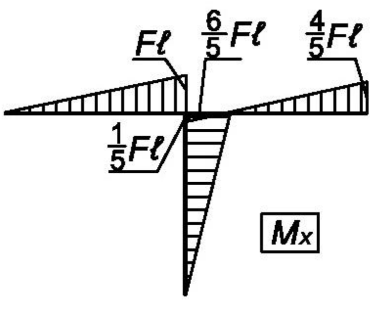


рис. 5.2

Теперь приложим к основной системе единичную нагрузку в сечении 1 и построим эпюру изгибающего момента *Mx1*.

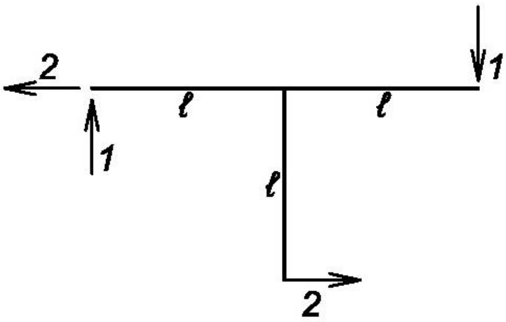


рис. 5.3

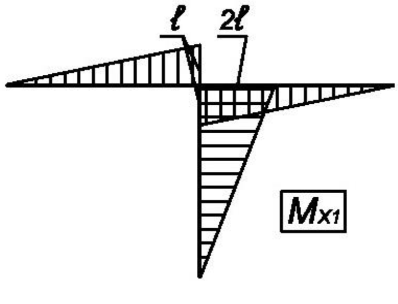


рис. 5.4

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\cdot Fl\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}Fl\cdot l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}Fl\cdot l\cdot\frac{1}{3}l+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot Fl\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\right]=\frac{16}{15}\frac{Fl^3}{EJ}$$

$\delta_{11}^{\Sigma}=\delta_1$ при $F=1$, т.е.

$$\delta_{11}^{\Sigma}=\frac{16}{15}\frac{l^3}{EJ}$$

Собственная частота колебаний равна:

$$p_0=\sqrt{\frac{15EJ}{16ml^3}}$$

II. Для записи уравнения вынужденных колебаний воспользуемся принципом Даламбера в обратной форме:

$y(t)=-m\ddot{y}\delta_{11}^{\Sigma}+M(t)\delta_{12}$, откуда

$$\ddot{y}+p_0^2y=\frac{\delta_{12}}{m\delta_{11}}M(t);$$

Коэффициент δ_{12} находим аналогично δ_{11}^{Σ}, приложив к основной системе в сечении 2 единичный момент и перемножив полученную эпюру M_{x1} (рис. 5.6) на суммарную эпюру M_x (рис.5.2).

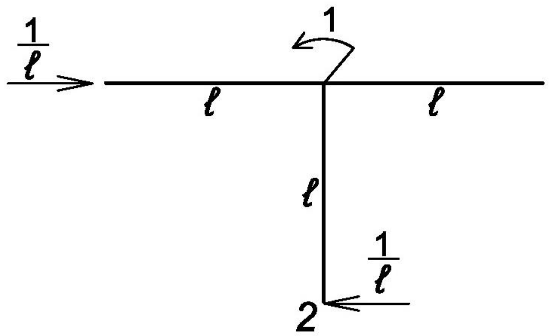


рис. 5.5

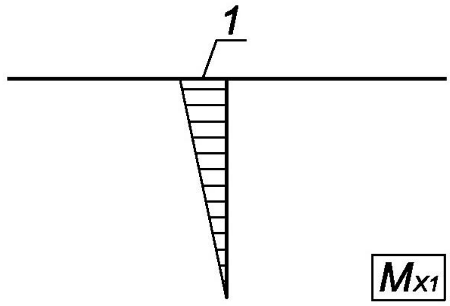


рис. 5.6

$$\delta_{12}=-\frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{6}{5}\cdot Fl\cdot\frac{2}{3}\right]=-\frac{2}{5}\frac{Fl^2}{EJ};$$

Тогда $\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}}=-\dfrac{3}{8l}$; и окончательно запишем:

$$\ddot{y}+p_0^2y=-\frac{3}{8ml}M(t);$$

Решение данного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$y_{о.о.}=C_1\cos p_0t+C_2\sin p_0t$$

$$y_{ч.н.}=-\frac{1}{mp_0}\int_0^t\frac{3}{8ml}M(\tau)\sin p_0(t-\tau)d\tau;$$

Пусть $M(t)$ – периодическая функция, заданная следующим графиком:

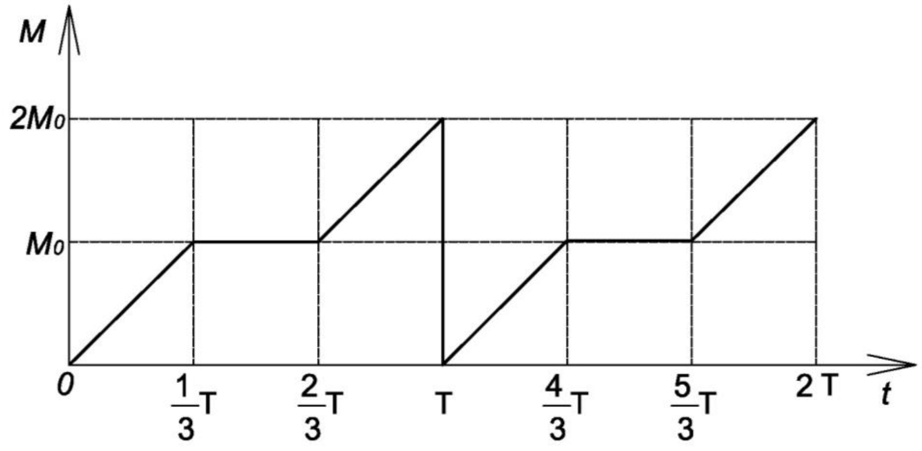


рис. 5.7

Где $T = \dfrac{\pi}{2p_0}$;

Для расчёта закона движения системы *y(t)* методом Дюффинга (см. 4.2.2) необходимо вычислить интегралы:

$$C_0 = \int_o^T M(\tau)\cos(p_0\tau)d\tau \text{ и}$$

$$S_0 = \int_o^T M(\tau)\sin(p_0\tau)d\tau;$$

Периодический внешний момент описывается следующими зависимостями:

$$M(t) = \begin{cases} M_0 \cdot \dfrac{3\tau}{T} & \text{при } 0 \le \tau \le \dfrac{1}{3}T; \\ M_0 & \text{при } \dfrac{1}{3}T \le \tau \le \dfrac{2}{3}T; \\ M_0\left(\dfrac{3\tau}{T} - 1\right) & \text{при } \dfrac{2}{3}T \le \tau \le T; \end{cases}$$

Тогда:

$$C_0 = 3M\int_o^{T/3} \tau\cos(p_0\tau)d\tau + M_0\int_{T/3}^{2T/3}\cos(p_0\tau)d\tau + M_0\int_{2T/3}^{T}\left(\frac{3\tau}{T} - 1\right)\cos(p_0\tau)d\tau;$$

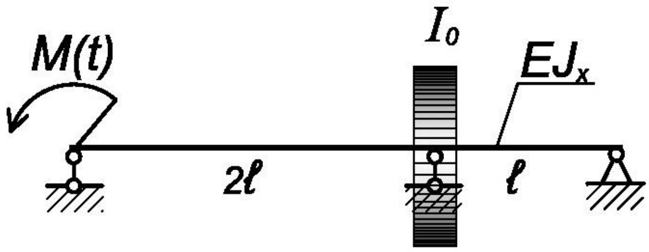
Аналогично:

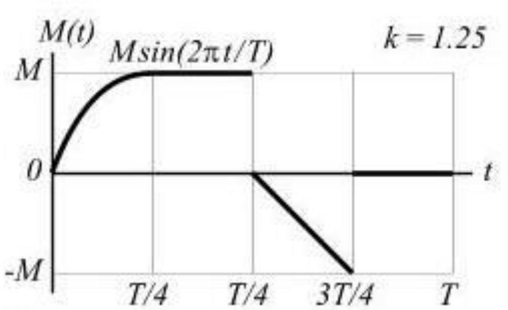
$$S_0 = 3M\int_o^{T/3} \tau\sin(p_0\tau)d\tau + M_0\int_{T/3}^{2T/3}\sin(p_0\tau)d\tau + M_0\int_{2T/3}^{T}\left(\frac{3\tau}{T} - 1\right)\sin(p_0\tau)d\tau;$$

Приложение

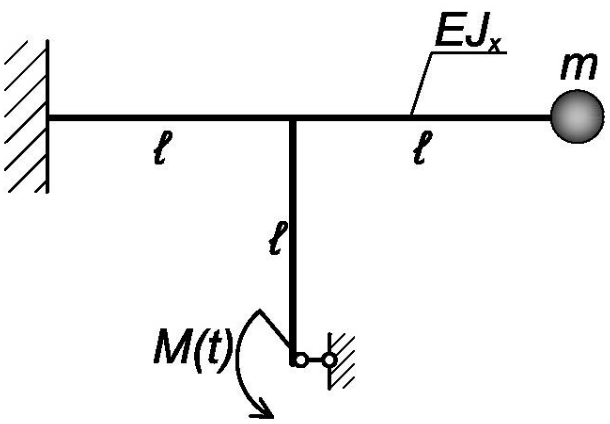
1. Варианты условий домашнего задания.

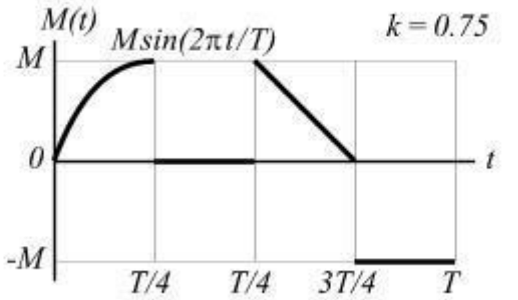
Вариант1



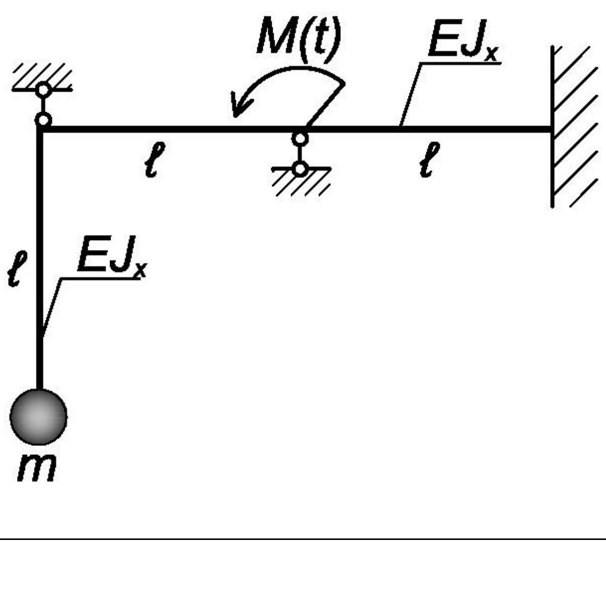


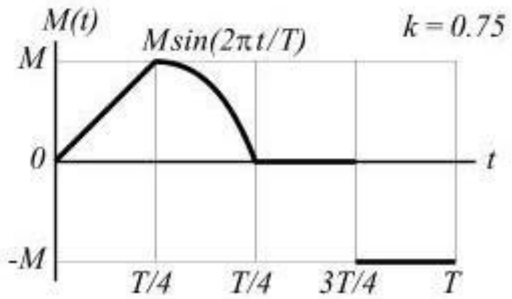
Вариант 2



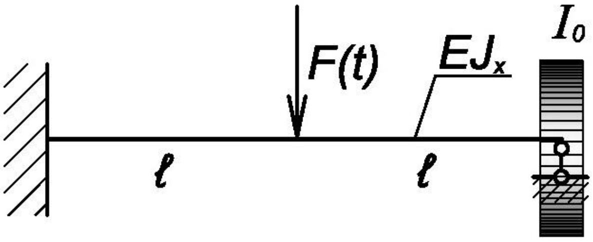


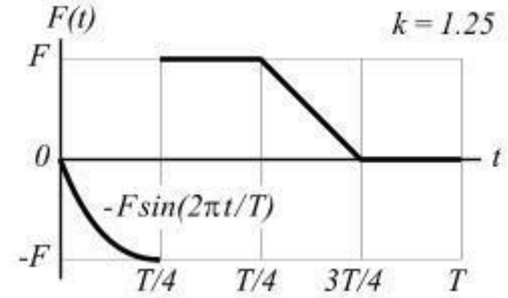
Вариант 3



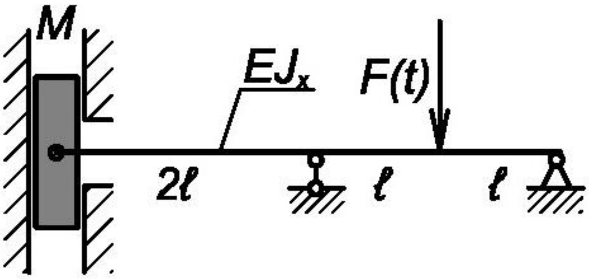


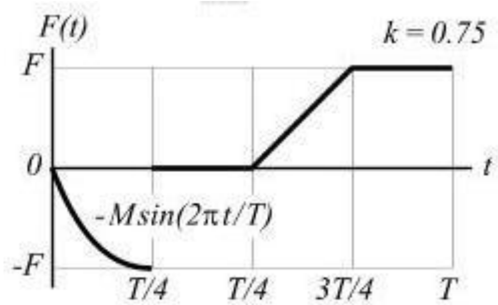
Вариант 4



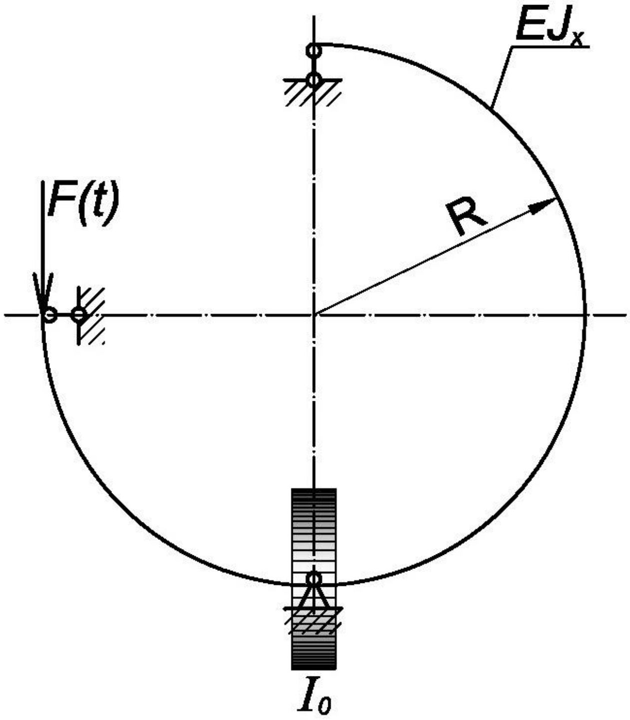


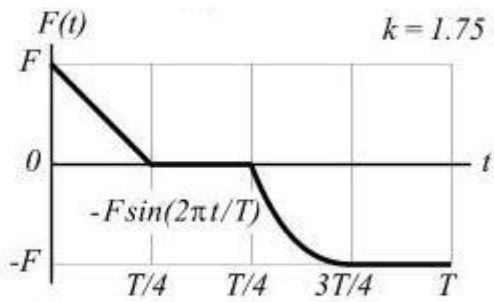
Вариант 5



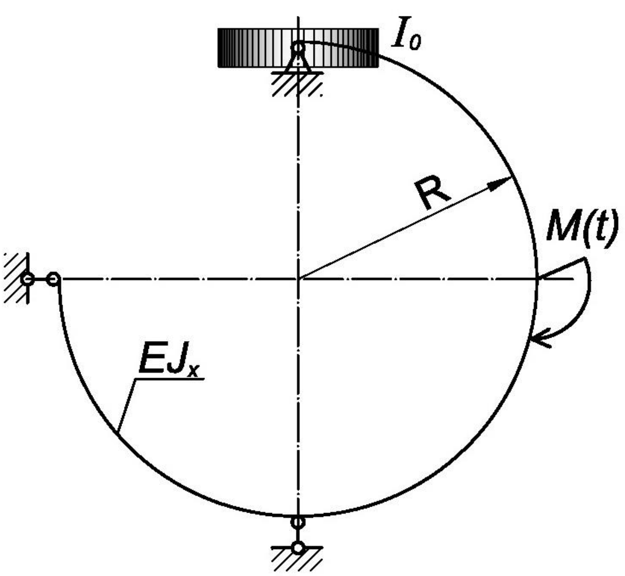


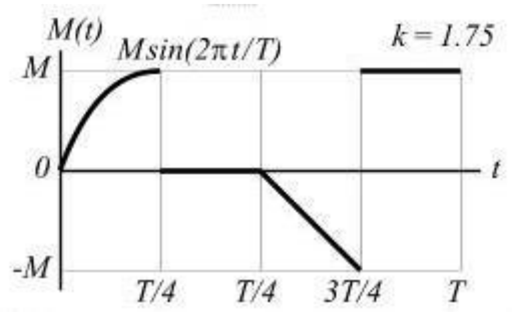
Вариант 6



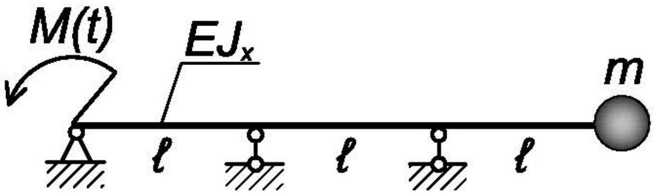


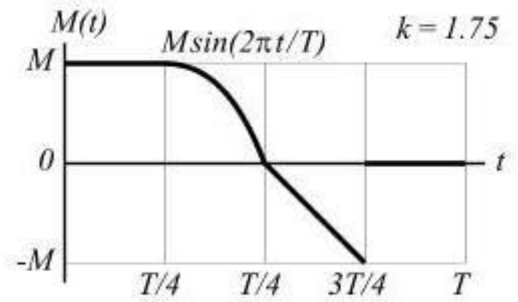
Вариант 7



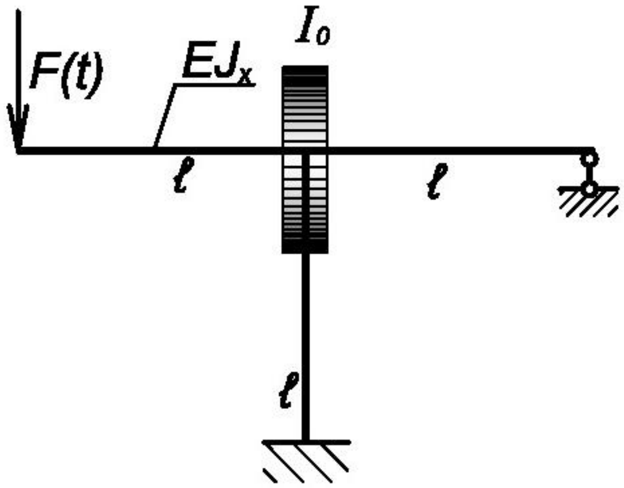


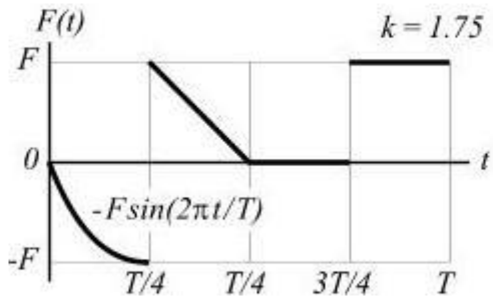
Вариант 8



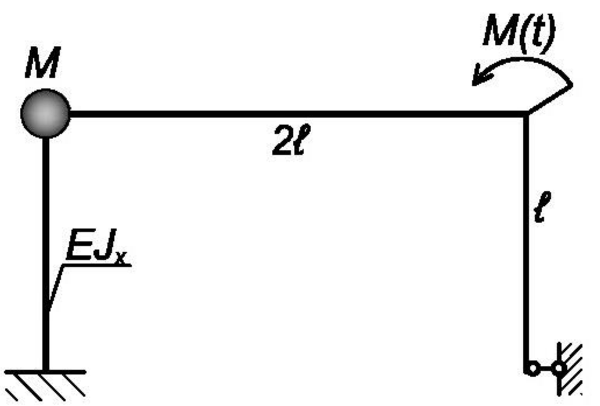


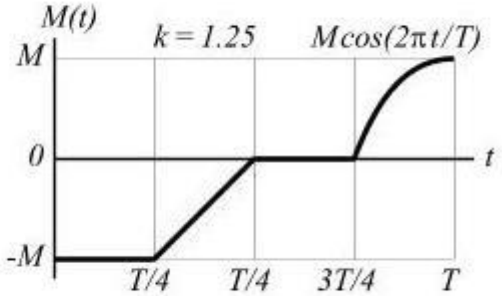
Вариант 9



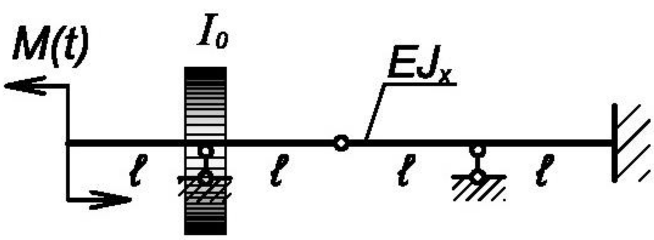


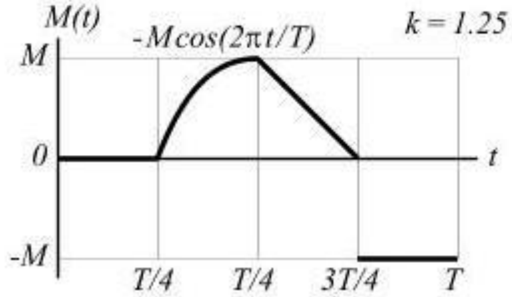
Вариант 10



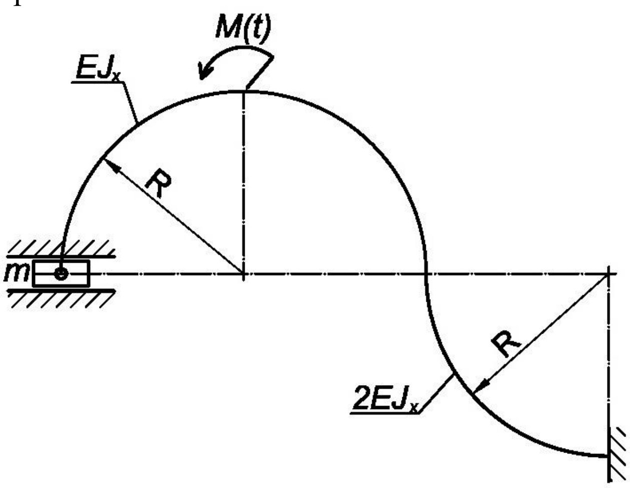


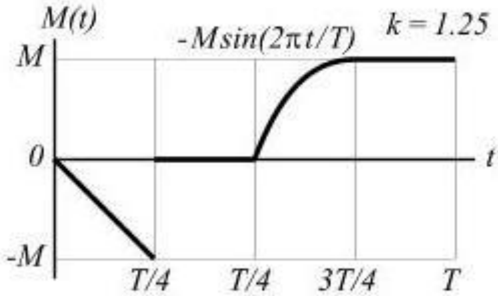
Вариант 11



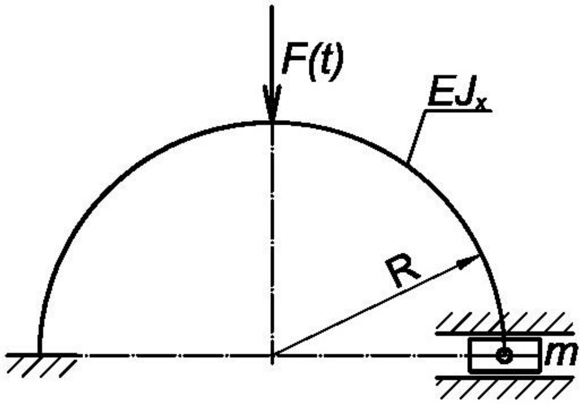


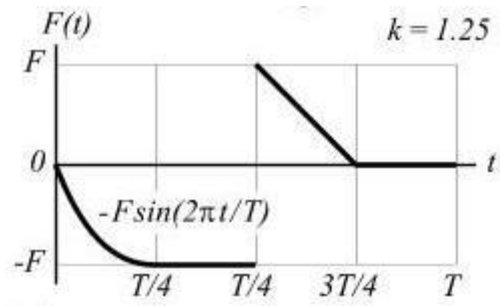
Вариант 12



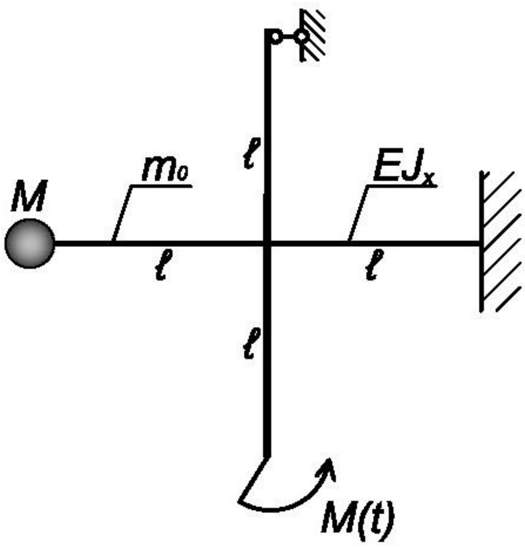


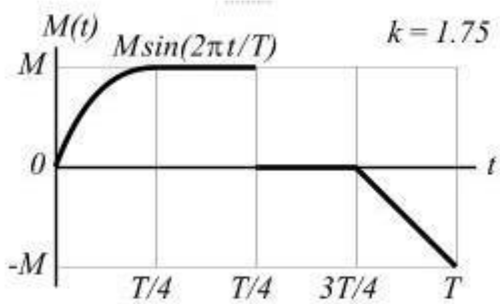
Вариант 13



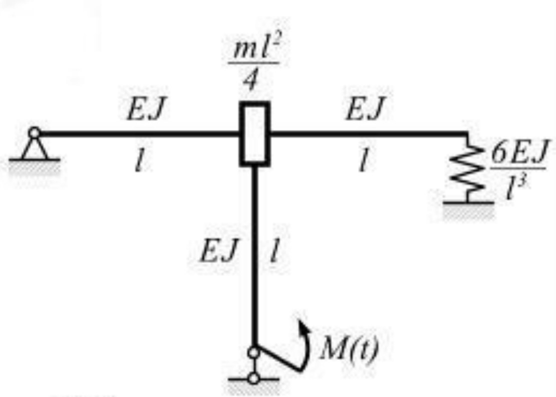


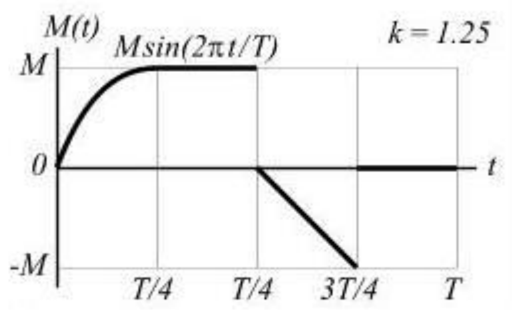
Вариант 14



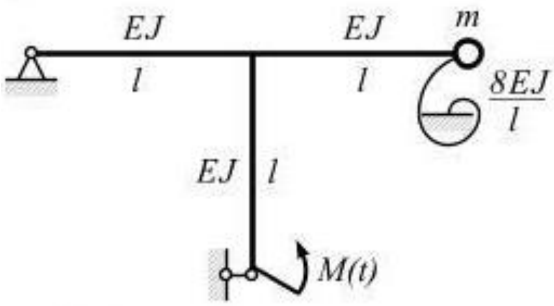


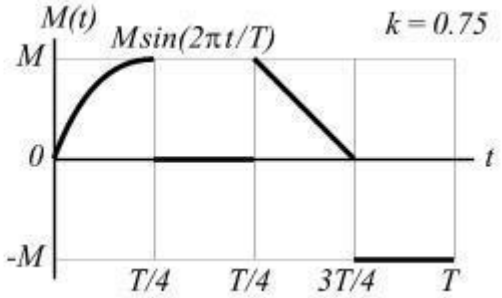
Вариант15



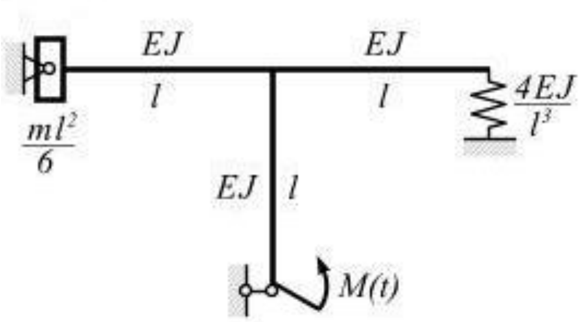


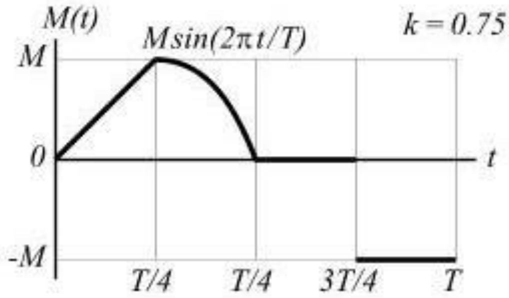
Вариант 16



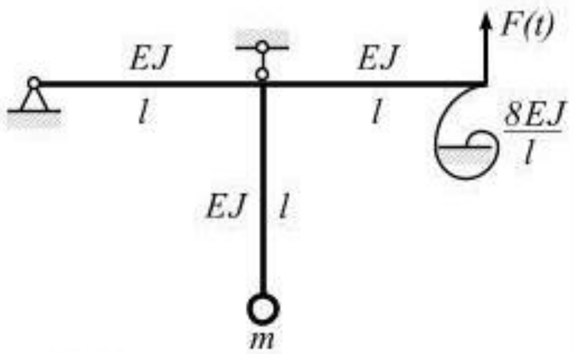


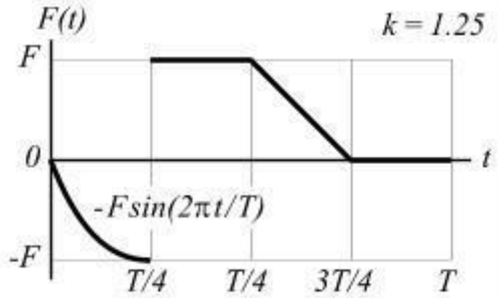
Вариант 17



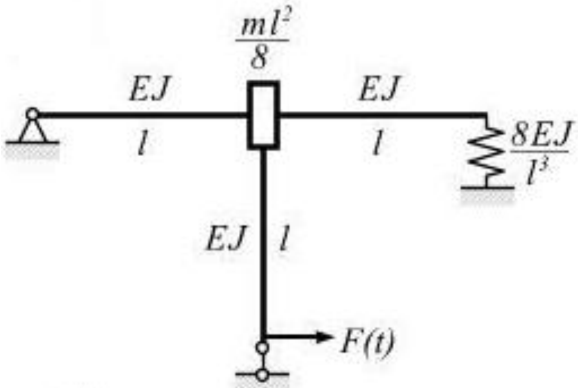


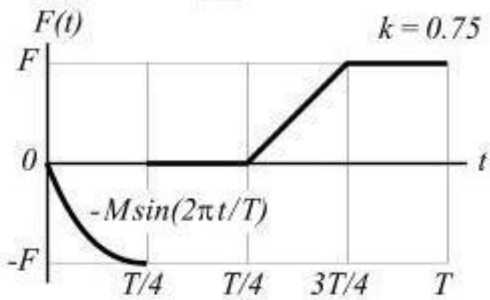
Вариант 18



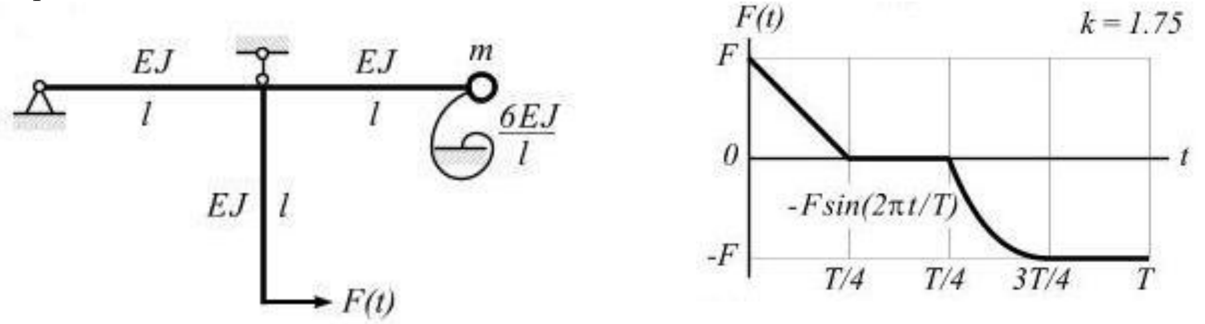


Вариант 19

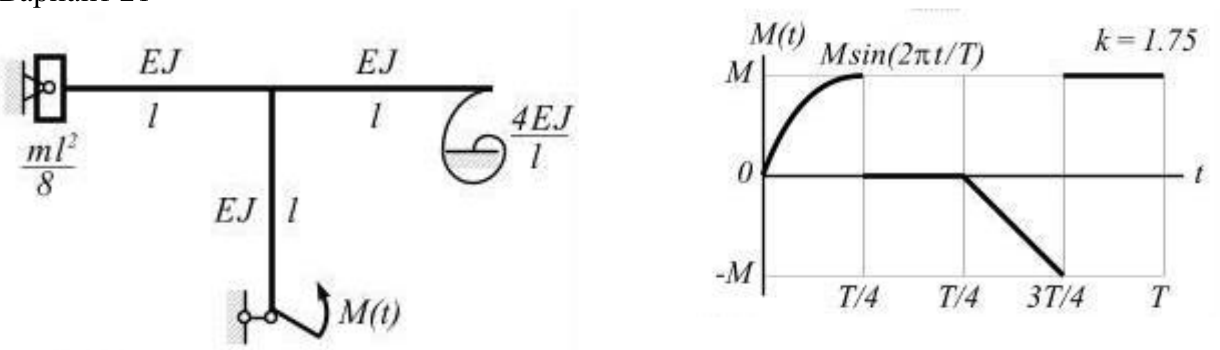




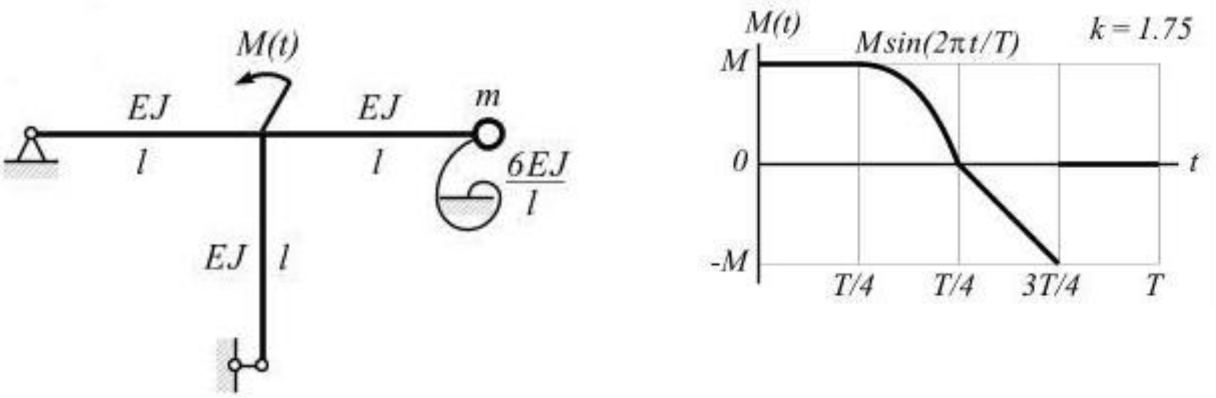
Вариант 20



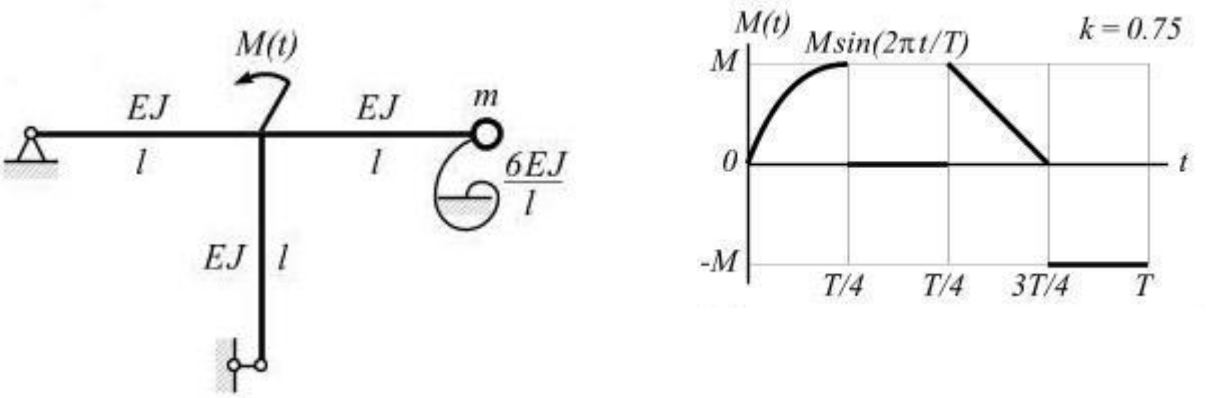
Вариант 21



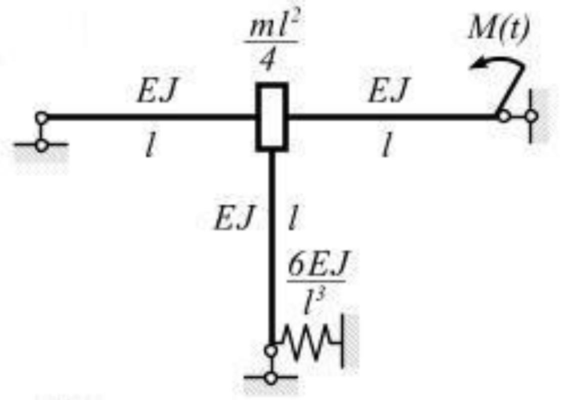
Вариант 22

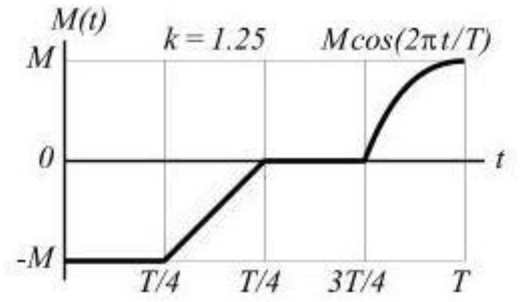


Вариант 23

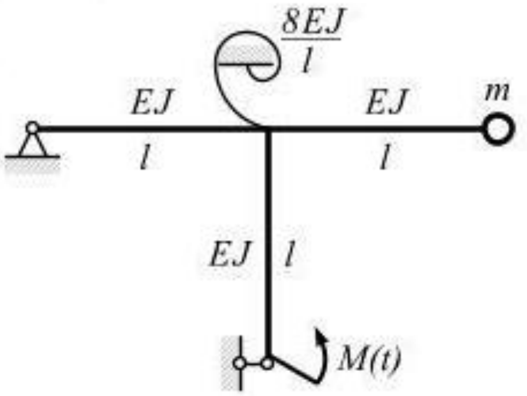


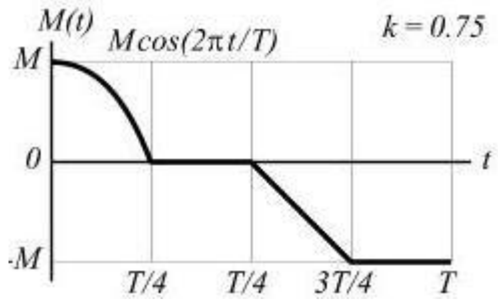
Вариант 24



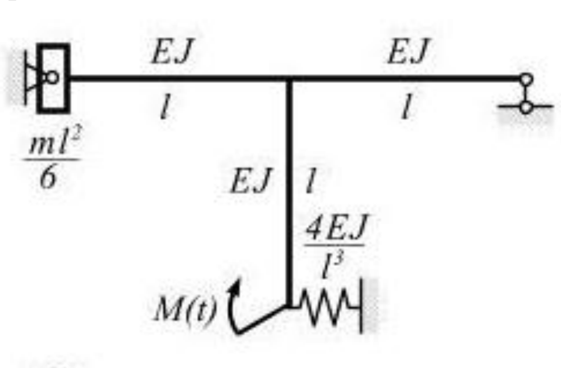


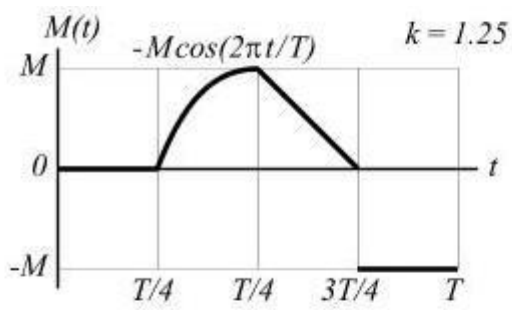
Вариант 25



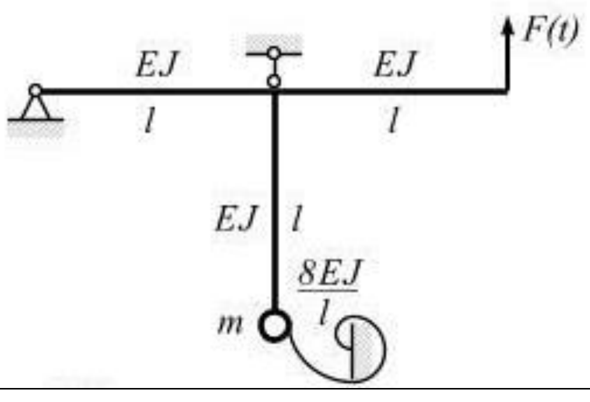


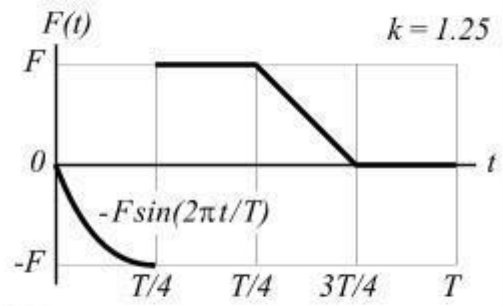
Вариант 26



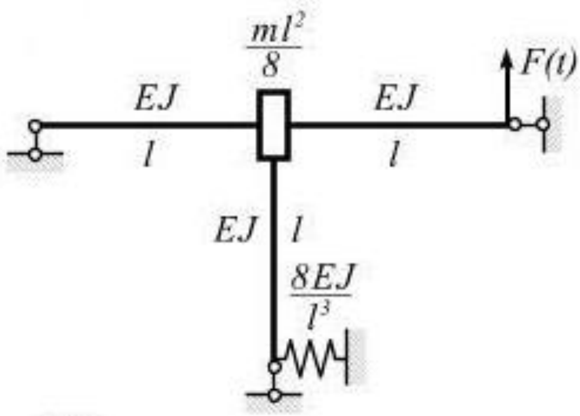


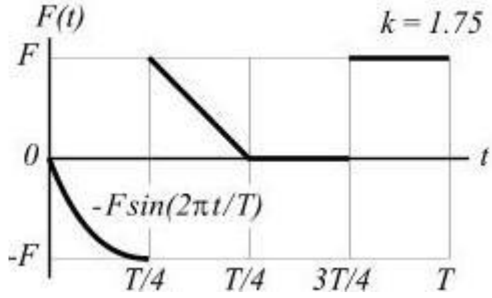
Вариант 27



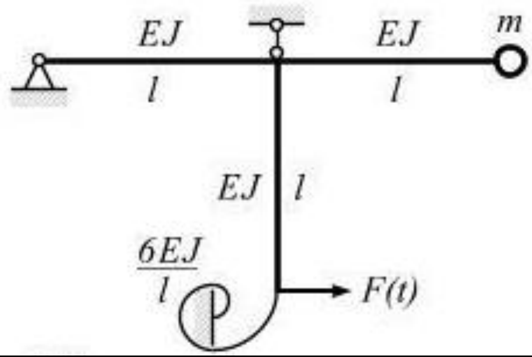


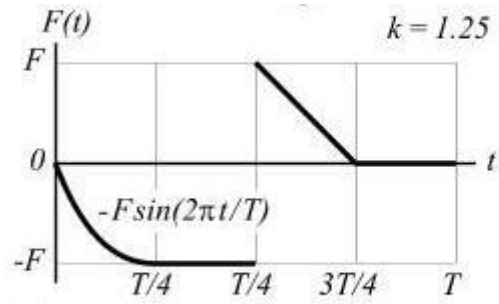
Вариант 28



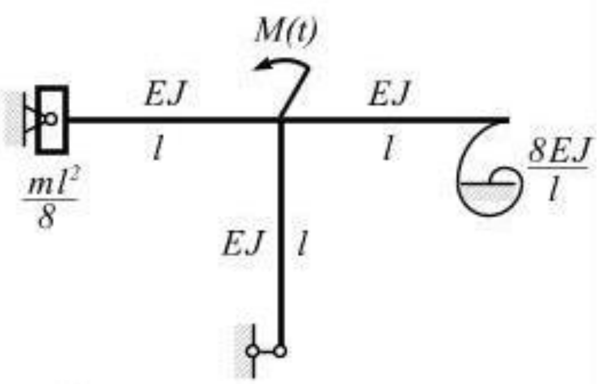


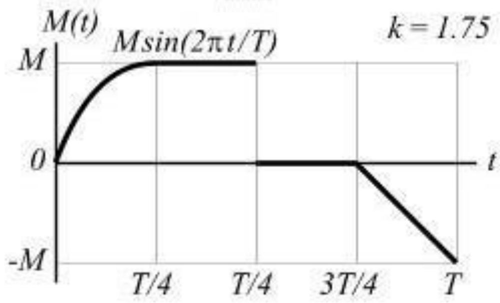
Вариант 29



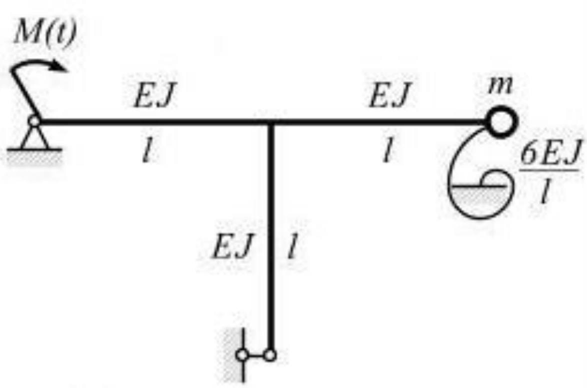


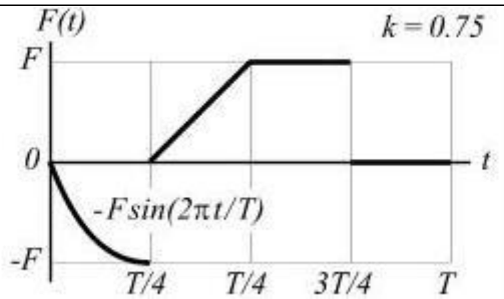
Вариант 30



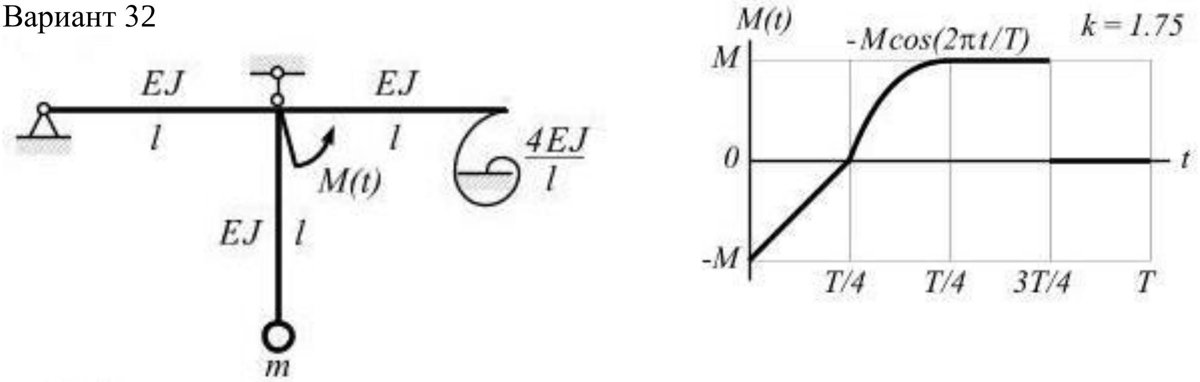


Вариант 31





Вариант 32



2. Специальные интегралы, встречающиеся при расчетах методом Дюффинга.

$$\int_0^t \tau \cdot cos(\, p_0\tau\,)d\tau = \left.\frac{p_0\tau \cdot sin(\, p_0\tau\,) + cos(\, p_0\tau\,)}{p_0^{\,2}}\right|_0^t = \frac{p_0 t \cdot sin(\, p_0 t\,) + cos(\, p_0 t\,) - 1}{p_0^{\,2}}$$

$$\int_0^t \tau \cdot sin(\, p_0\tau\,)d\tau = \left.\frac{sin(\, p_0\tau\,) - p_0\tau \cdot cos(\, p_0\tau\,)}{p_0^{\,2}}\right|_0^t = \frac{sin(\, p_0 t\,) - p_0 t \cdot cos(\, p_0 t\,)}{p_0^{\,2}}$$

$$\int_0^t sin(\,\alpha\tau\,) \cdot sin(\,\beta\tau\,)d\tau = \left.\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}sin(\alpha-\beta)\tau - \frac{1}{\alpha+\beta}sin(\alpha+\beta)\tau\right]\right|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}sin(\alpha-\beta)t - \frac{1}{\alpha+\beta}sin(\alpha+\beta)t\right]$$