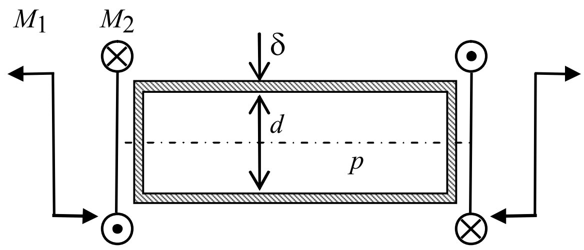
Общая теория напряжённого состояния
Оболочки

Постановка задачи: Цилиндрическая оболочка диаметром d и толщиной стенки δ нагружена внутренним давлением и двумя моментами. Необходимо изучить прочность оболочки.



Исходные данные:

$d = 50\,\text{мм}$; $\delta = 4\,\text{мм}$; $p = 7\,\text{МПа}$

$M_1 = 350\,\text{кН}\cdot\text{мм}$; $M_2 = 300\,\text{кН}\cdot\text{мм}$

Решение: Поскольку характеристики материала не заданы, изучение прочности сводится к поиску опасных сечений, опасных точек в них, и максимального эквивалентного напряжения.

Безмоментная теория, хорошо описывающая напряжения в сечениях оболочки с плавно изменяющимися радиусами меридиана и параллели, оказывается неприменимой к сечениям, где хотя бы один из этих радиусов меняется резко. В данном случае речь идет о торцах или днищах, где понятия радиусов кривизны вообще теряют смысл. Поэтому в дальнейшем предполагается, что, соблюдая принцип Сен-Венана, мы изучаем напряжённое состояние в сечениях, весьма удаленных от торцов, при этом длина оболочки считается существенно большей диаметра.

Воспользуемся принципом суперпозиции, начав с давления:

$$\sigma_t = \frac{pd}{2\delta}; \qquad \sigma_m = \frac{pd}{4\delta}$$

Поскольку давление внутреннее, оба напряжения – растягивающие, то есть положительные.

Рассматривая воздействие изгибающего и крутящего моментов, удобно мыслить оболочку как тонкостенную трубу ($\delta << d$). К такому случаю подходит расчётная схема стержня ($d << l$), и, следовательно, справедливы формулы изгиба и кручения стержня:

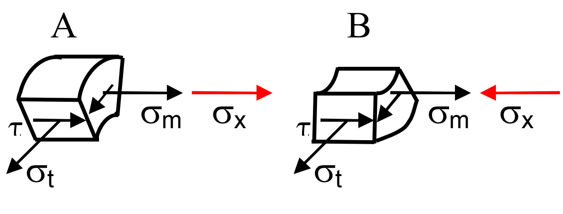
$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_1}{W_x}; \qquad W_x = \frac{\pi d^2 \delta}{4}$$

$$\tau = \frac{M_z}{W_K} = \frac{M_2}{W_K}; \qquad W_K = \frac{\pi d^2 \delta}{2}$$

Все напряжения постоянны по осевой координате и, следовательно, все сечения равноопасны. Это – первый вывод задачи.

Кроме того, напряжения σ_t, σ_m и τ во всех точках каждого сечения одинаковы по модулю и направлению, чего нельзя сказать про σ_x – верхние слои растянуты и в них создано положительное изгибное напряжение, нижние слои сжаты и в них $\sigma_x < 0$. Изгибные напряжения на ближней и дальней образующих равны нулю, но меридиональное и касательное напряжения в них создают упрощенно-плоское НС, в котором $\sigma_1 = 32.946$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -11.071$ МПа. Читателю предоставляется возможность в этом убедиться самостоятельно. Эти точки, как мы увидим позже, опасными не являются.

Таковыми могут оказаться точки, расположенные на верхней (А) и нижней (В) образующих.



Иногда приходится слышать мнение о том, что, поскольку растягивающие напряжения почти всегда опаснее сжимающих, точка А заведомо опасней точки В. Однако не следует забывать о том, что вывод, работающий в частном случае простого одноосного НС, не может быть

безоглядно применен к сложному, в данной задаче двухосному, НС. Позже нам предстоит в этом убедиться.
Рассмотрим точку А:

$$\sigma_z = \sigma_m + \sigma_x \tag{1}$$

Через σ_z обозначено напряжение, действующее вдоль оси оболочки, каковая ось, как и в стержнях, обозначается через z. Впрочем, это напряжение можно обозначить и по-другому.
Чтобы не запутаться, рекомендуется выбрать одну последовательность осей и придерживаться ее в рамках хотя бы одной задачи. Я раз и навсегда избрал алфавитный принцип и располагаю оси так: r-t-z. Правда, в цилиндрах оси m и z совпадают, и тогда последовательность будет m-r-t. Елизавета Ильинична также придерживается моего принципа. Более того, во избежание ошибки она бледным мелким текстом пишет названия осей над столбцами тензора (поз. 3).
Итак, придерживаясь означенной последовательности r-t-z, формируем тензор:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & \tau \\ 0 & \tau & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \sigma_t + \sigma_z = 110.188\,\text{МПа}$$

$$J_2 = \sigma_t \sigma_z - \tau^2 = 2541.923\,\text{МПа}^2$$

$$J_3 = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0$$

обращается в

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma = 0$$

Один из его корней $\sigma_I = 0$. Очередной раз следует напомнить про индексацию главных напряжений: арабские цифры 1, 2, 3 могут применяться, только если напряжения расположены по убыванию. Мы пока не знаем величины двух остальных главных напряжений, и они могут оказаться как больше, так и меньше нуля. Поэтому временно используется индексация римскими цифрами.
Если $\sigma \neq 0$, то после сокращения на σ уравнение становится квадратным:

$$\sigma^2 - J_1\sigma + J_2 = 0$$

его корни

$$\sigma_{II} = 77.308\,\text{МПа}; \qquad \sigma_{III} = 32.881\,\text{МПа}$$

Теперь можно перейти к индексации арабскими цифрами:

$$\sigma_1 = \sigma_{II} = 77.308\,\text{МПа}; \qquad \sigma_2 = \sigma_{III} = 32.881\,\text{МПа}; \qquad \sigma_3 = \sigma_I = 0$$

Расчёт по критерию Треска-Сен-Венана дает

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 77.308\,\text{МПа}$$

Теперь перейдем к точке В. Вместо формулы (1) получаем

$$\sigma_z = \sigma_m - \sigma_x$$

Тензор имеет тот же вид. Все остальные расчёты выполняются совершенно аналогично:

$$J_1 = 21.062\,\text{МПа}$$

$$J_2 = -1357.373\,\text{МПа}^2$$

$$\sigma_1 = 48.849\,\text{МПа}; \qquad \sigma_2 = 0; \qquad \sigma_3 = -27,787\,\text{МПа}$$

$$\sigma_{экв} = 76.636\,\text{МПа}$$

Разница между эквивалентными напряжениями оказалась меньше 1%. Поэтому, если допустимая погрешность расчёта больше этой величины, точки можно объявить равноопасными.
Чтобы продемонстрировать, что точка A, пусть и формально, может оказаться менее опасной, чем B, достаточно изменить давление с 7 МПа на 6 МПа. Поэтому вывод о «более опасном растяжении» оказался ошибочным: в случае сложных НС надо обязательно рассматривать обе точки.
Если же провести расчёт по критерию Хубера-Мизеса, то точки A и B оказываются абсолютно равноопасными вне зависимости от исходных данных!