

## Определение геометрических характеристик плоской фигуры, состоящей из прямоугольников

Дана фигура в виде буквы «Д», показанная на Рис. 1. Сторона квадрата сетки принимается равной безразмерной единице. Требуется найти центр тяжести фигуры, ее осевые моменты инерции и момент сопротивления относительно главной центральной горизонтальной оси.

Для указания координат точек будем использовать «шахматную» нотацию, только сочетание «буква+цифра» будет соответствовать не клетка, а точка пересечения соответствующих отрезков.

Сначала найдем площадь фигуры:

$$A = A_{c3-c8-f8-f3} + A_{a1-a3-h3-h1} - A_{d3-d7-e7-e3} - A_{b1-b2-g2-g1} = 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 15 + 14 - 4 - 5 = 20$$

Возьмем в качестве начальной (пробной) оси  $x_0$  (Рис. 2):

$$S_{x_0} = 2 \cdot S_{a1-a2-b2-b1} + 2 \cdot S_{a2-a3-c3-c2} + S_{c2-c8-f8-f2} - S_{d2-d7-e7-e2} + S_{d2-d3-e3-e2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 2 + 54 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = 43$$

$$y_{x_0}^C = \frac{43}{20}$$

$$I_{x_0} = \frac{1}{3} \left( 2 \cdot I_{a1-a2-b2-b1} + 2 \cdot I_{a2-a3-c3-c2} + I_{c2-c8-f8-f2} - I_{d2-d7-e7-e2} + I_{d2-d3-e3-e2} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 \cdot 1 \cdot 1^3 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 6^3 - 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 1^3 \right) = \frac{1}{3} (2 + 4 + 648 - 125 + 1) = \frac{530}{3}$$

$$I_x = I_{x_0} - A \cdot (y_{x_0}^C)^2 = \frac{530}{3} - 20 \cdot \left(\frac{43}{20}\right)^2 = \frac{530}{3} - \frac{43^2}{20} = \frac{530 \cdot 20 - 3 \cdot 43^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверить полученный результат можно несколькими способами. Один из самых простых (и, соответственно, наименее надежных) заключается в подсчете моментов инерции двух прямоугольников, один из которых полностью включает в себя данную фигуру, а другой, наоборот, имеет момент инерции заведомо меньше, чем у нее. Обозначим эти два момента инерции через  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  соответственно. Тогда проверка состоит в соблюдении неравенства

$$I_{\min} < I_x < I_{\max} \quad (1)$$

$$I_{\max} = I_{a1-a8-h8-h1} = \frac{1}{12} \cdot 7 \cdot 7^3 = \frac{2401}{12} \approx 200$$

$$I_{\min} = I_{c2-c8-f8-f2} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6^3 = \frac{648}{12} = 54$$

Учитывая, что  $I_x \approx 84$ , видим, что неравенство (1) соблюдается. Однако следует еще раз подчеркнуть низкую достоверность такого приема. К тому же, он не проверяет правильность определения центра тяжести.

Поэтому лучше выполнить еще один расчет относительно другой оси. Должны сойтись положение (но не координата!) центра тяжести, и момент инерции. Проверим относительно оси  $x_1$  (Рис. 3):

$$S_{x_1} = 2 \cdot S_{a1-a3-b3-b1} + S_{b2-b3-g3-g2} + S_{c3-c8-f8-f3} - S_{d3-d7-e7-e3} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot 4 \cdot 2 = -4 - \frac{5}{2} + \frac{75}{2} - 8 = 23$$

$$y_{x_1}^C = \frac{23}{20}$$

Откладывая полученный отрезок от оси  $x_1$  вверх, убеждаемся, что центры тяжести, найденные двумя способами, совпали. Остается проверить моменты инерции:

$$I_{x_1} = \frac{1}{3} \left( 2 \cdot I_{a1-a3-b3-b1} + I_{b2-b3-g3-g2} + I_{c3-c8-f8-f3} - I_{d3-d7-e7-e3} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 \cdot 1 \cdot 2^3 + 5 \cdot 1^3 + 3 \cdot 5^3 - 1 \cdot 4^3 \right) = \frac{1}{3} (16 + 5 + 375 - 64) = \frac{332}{3}$$

$$I_x = I_{x_1} - A \cdot (y_{x_1}^C)^2 = \frac{332}{3} - 20 \cdot \left(\frac{23}{20}\right)^2 = \frac{332 \cdot 20 - 3 \cdot 23^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверка сошлась. Однако мы выполним и третий расчет, теперь относительно оси  $x_2$ , хотя бы с целью обсуждения удобства выбора начальной оси (Рис. 4).

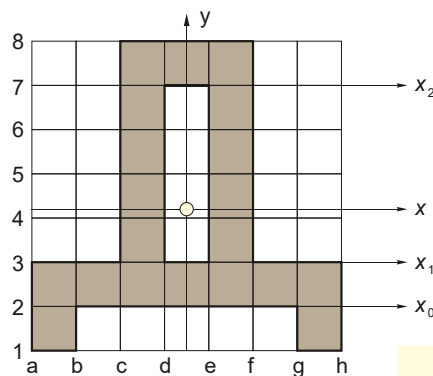


Рис. 1

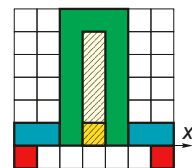


Рис. 2

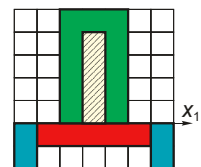


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 S_{x_2} &= 2 \cdot S_{a_1-a_7-b_7-b_1} + 2 \cdot S_{b_2-b_7-c_7-c_2} - 2 \cdot S_{a_3-a_7-c_7-c_3} + S_{c_2-c_7-f_7-f_2} - S_{d_3-d_7-e_7-e_3} + S_{c_7-c_8-f_8-f_7} = \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 1 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= -36 - 25 + 32 - \frac{75}{2} + 8 + \frac{3}{2} = -57
 \end{aligned}$$

$$y_{x_2}^C = -\frac{57}{20}$$

Нетрудно убедиться, что центр тяжести опять оказался в той же точке (отмечена светлым кружком на Рис. 1). Момент инерции:

$$\begin{aligned}
 I_{x_2} &= \frac{1}{3} (2 \cdot I_{a_1-a_7-b_7-b_1} + 2 \cdot I_{b_2-b_7-c_7-c_2} - 2 \cdot I_{a_3-a_7-c_7-c_3} + I_{c_2-c_7-f_7-f_2} - I_{d_3-d_7-e_7-e_3} + I_{c_7-c_8-f_8-f_7}) = \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 1 \cdot 5^3 - 2 \cdot 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 5^3 - 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 1^3) = \frac{1}{3} (432 + 250 - 256 + 375 - 64 + 3) = \frac{740}{3}
 \end{aligned}$$

$$I_x = I_{x_2} - A \cdot (y_{x_2}^C)^2 = \frac{740}{3} - 20 \cdot \left(-\frac{57}{20}\right)^2 = \frac{740}{3} - \frac{57^2}{20} = \frac{740 \cdot 20 - 3 \cdot 57^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверка опять сошлась.

Сравнивая оси с точки зрения удобства и простоты расчетов, нетрудно показать, что ось  $x_1$  является наиболее, а  $x_2$  – наименее удачной. Например, в выражения для статического момента и момента инерции для рассмотренных осей  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  входят 5, 4 и 6 слагаемых соответственно. Кроме того, алгебраические величины статических моментов равны 42, 23 и 57 соответственно, а чем меньше числа – тем легче считать. Тот же аргумент справедлив для моментов инерции относительно начальных осей (числители равны 530, 332 и 740). И, наконец, важно количество прямоугольников, опирающихся одной своей стороной на выбранную ось. Оно равно двум, пяти и трем соответственно, поэтому в первом и последнем случаях возникла необходимость в довольно изощренных приемах разбиения фигуры.

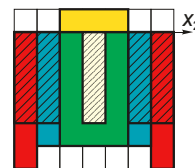


Рис. 4

В завершение можно сформулировать несколько простых советов по выбору начальной оси:

- Чем больше число контуров фигуры, через которые проходит ось, тем лучше;
- Чем больше в фигуре выступов и отверстий, тем ближе к ним следует располагать ось (в идеале – она должна проходить по их границам);
- Наметив умозрительно центр тяжести, следует выбирать ось как можно ближе к этой точке – числа получатся меньше, а промежуточные выкладки – проще.

Осталось найти момент сопротивления. Расстояние от оси  $x$  до верхней границы фигуры равно

$$y_{\text{верх}} = |y_{x_2}^C| + 1 = \frac{57}{20} + 1 = \frac{77}{20}$$

до нижней

$$y_{\text{низ}} = |y_{x_0}^C| + 1 = \frac{43}{20} + 1 = \frac{63}{20} \rightarrow y_{\text{max}} = \max(y_{\text{верх}}, y_{\text{низ}}) = \max\left(\frac{77}{20}, \frac{63}{20}\right) = \frac{77}{20}$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\text{max}}} = \frac{5053}{60} \cdot \frac{20}{77} = \frac{5053}{231}$$

Для самопроверки предлагается найти геометрические характеристики фигуры в виде буквы «Ф» (Рис. 5). Результаты:

$$A = 25$$

$$y_C = \frac{211}{50} \quad (\text{от нижней границы})$$

$$I_x = \frac{29737}{300}$$

$$y_{\text{max}} = \frac{211}{50}$$

$$W_x = \frac{29737}{1266}$$

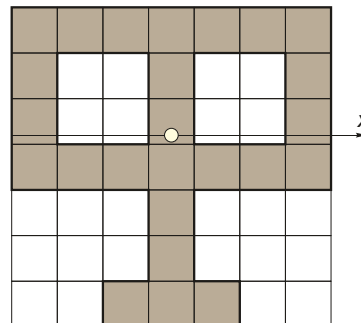


Рис. 5