

Косой изгиб балки произвольного поперечного сечения

Дана консольная балка, нагруженная на конце силой, перпендикулярной оси z , причем вокруг нее сила может поворачиваться на угол α . Реализовать такой вид нагружения технически сложно, поэтому постановку задачи можно представить и так: сила имеет гравитационное происхождение, а балка поворачивается вокруг оси z , как это сделано в лабораторной работе №6. Напомним, что в ней поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник со сторонами $b = 12$ мм, $h = 24$ мм, то есть отношение сторон равно 1:2.

Будут изучены три вопроса: *а)* как меняется угол наклона к горизонту нейтральной линии (н.л.); *б)* как перемещается конец балки; и *в)* как меняется угол между силовой и нейтральной линиями. Аргументом является угол α наклона силовой линии к горизонту. Сечение может иметь произвольную форму.

Опасное сечение конструкции – заделка, близ нее и будет изучаться напряженное состояние. Как известно, у любой фигуры можно найти хотя бы одну пару главных центральных осей. Направим ось x вправо, а ось y – вверх (Рис. 1). Тогда в первом квадранте оба изгибающих момента

$$M_x = F_y l = Fl \cdot \sin \alpha; \quad M_y = F_x l = Fl \cdot \cos \alpha$$

создают сжатие и, следовательно, зависимость напряжений от координат и угла α примет вид

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = -Fl \left(\frac{\sin \alpha}{I_x} y + \frac{\cos \alpha}{I_y} x \right)$$

Уравнение н.л. запишется так:

$$\sigma = 0 \rightarrow \frac{\sin \alpha}{I_x} y + \frac{\cos \alpha}{I_y} x = 0 \rightarrow y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{I_x}{I_y} x = -k \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot x, \text{ где } k = \frac{I_x}{I_y}, \text{ причем } 0 < k < \infty.$$

Обозначив через β угол наклона н.л. к горизонту, получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = -k \cdot \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(-k \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = -\operatorname{arctg}(k \cdot \operatorname{ctg} \alpha)$$

Рассмотрим только диапазон $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (далее все периодически повторяется). Очевидно, то при $\alpha \rightarrow 0$

н.л. вертикальна и $\beta = -\frac{\pi}{2}$, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ н.л. горизонтальна и $\beta = 0$. Кроме того, в частном случае

$I_x = I_y \rightarrow k = 1 \rightarrow \beta = -\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{\pi}{2} + \alpha$. Данный случай соответствует *а)* правильным

многоугольникам; *б)* круговым сечениям (поскольку окружность можно мыслить как правильный многоугольник с бесконечным числом сторон); и *в)* фигурам, имеющим хотя бы две пары главных центральных осей (например, фигуре в виде знака «плюс»).

На Рис. 2 показаны графики функции $\beta(\alpha)$ при разных значениях коэффициента k . Можно показать, что при $k \rightarrow \infty$ график

«прижимается» к прямой $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = -\frac{\pi}{2}$, а при $k \rightarrow 0$ – к осям

$\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Далее, при любых k функция $\beta(\alpha)$ при $\alpha = 0$, строго говоря, имеет сингулярность, так как $\operatorname{ctg}(0) = \infty$, однако $\operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$. Кроме того, каждая ветка $k = \operatorname{const}$ симметрична

относительно графика функции $\beta = -\alpha$ (серая прямая), то есть если $\beta' = \beta(k, \alpha')$, то $\alpha' = \beta(k, \beta')$. И, наконец, две ветки с

коэффициентами k , находящимися в обратной зависимости, симметричны относительно графика функции $\beta = -\frac{\pi}{2} + \alpha$

(красная прямая), то есть если $\beta' = \frac{\pi}{2} + \beta(k, \alpha')$, то $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \beta(\frac{1}{k}, \beta')$.

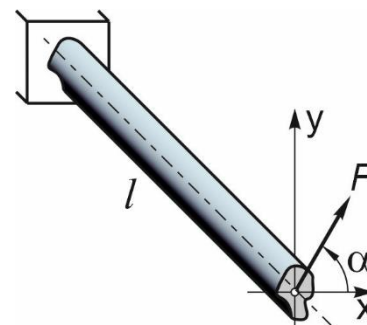


Рис. 1

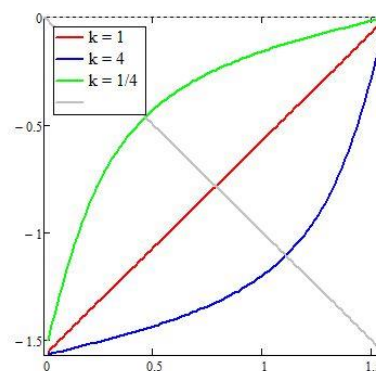


Рис. 2

Случаи $k = 4$ и $k = \frac{1}{4}$ рассмотрены потому, что они соответствуют экспериментальной установке работы №6; в самом деле, при расположении балки длинной стороной по вертикали жесткость балки максимальна и коэффициент k равен

$$k = \frac{I_x}{I_y} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{1}{12}hb^3} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 = 4$$

Если же повернуть балку на 90° , то $k = \frac{1}{4}$, и жесткость минимальна.

Перейдем к определению перемещений, правда, довольно необычному: выясним, какие кривые опишет в пространстве (точнее, на плоскости, перпендикулярной оси) конец консоли, при разных отношениях главных моментов инерции.

Прогиб на конце консоли, нагруженной сосредоточенной перпендикулярной оси силой в том же сечении, равен $\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}$, значит, в рассматриваемом случае

$$u = \frac{1}{3} \frac{F_x l^3}{EI_y} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3 \cos \alpha}{EI_y}; \quad v = \frac{1}{3} \frac{F_y l^3}{EI_x} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3 \sin \alpha}{EI_x};$$

$$f = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_x^2}} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_x} \sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

где u и v – прогибы вдоль осей x и y , соответственно, f – полное линейное перемещение. Графики функции $f(k, \alpha)$ для различных значений k в полярных координатах показаны на Рис. 3.

Радиальное расстояние между соседними окружностями (серым цветом) равно $\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_x}$. Траектории для тех же частных случаев

$k = 1$, $k = 4$ и $k = \frac{1}{4}$ выделены теми же цветами, что и на Рис. 2. При $k \rightarrow \infty$ траектории будут стремиться

к двум окружностям диаметром $k \cdot \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_x}$ каждая, расположенным по горизонтали и имеющим общую

точку в начале координат (описывая фигуру «бесконечность» типа той, что показана фиолетовым цветом, только в k раз больше). При $k \rightarrow 0$ окружности диаметром $\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_x}$ будут располагаться по

вертикали («восьмерка») с той же общей точкой.

Изучим теперь зависимость между углами α и β , в частности, найдем, при каком угле наклона силовой линии угол между ней и н.л. приобретает экстремальное значение.

Производная функции $\beta(k, \alpha) - \alpha$ имеет вид

$$\frac{d}{d\alpha} (\beta(k, \alpha) - \alpha) = B(k, \alpha) = \frac{k(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} - 1$$

В частном случае $k = 1$ нетрудно показать, что $B(k, \alpha) \equiv 0$. Объясняется это тем, что силовая и нейтральная линии взаимно перпендикулярны, независимо от угла α .

Приравняв функцию $B(k, \alpha)$ нулю при $k \neq 1$, после преобразований получаем угол, при котором разность углов α и β имеет экстремум: $\alpha^* = \operatorname{arctg} \sqrt{k}$. Причем оказывается, что $\beta(k, \alpha^*) = -\alpha^*$ и поэтому экстремальный угол между линиями по модулю равен $2\alpha^*$. Кроме того, при $k < 1$ функция имеет один минимум, а при $k > 1$ – максимум.

Поясним расчеты все на тех же частных случаях. При $k = \frac{1}{4}$

получаем $\alpha_{1/4}^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ$ (Рис. 4, а), при $k = 4$ находим $\alpha_4^* = \operatorname{arctg}(2) = 63.4^\circ$ (Рис. 4, б). Кроме

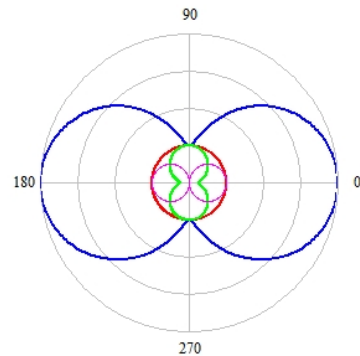


Рис. 3

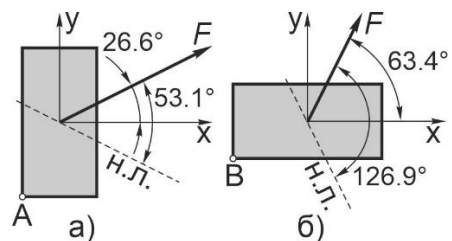


Рис. 4

того, из формулы суммы арктангенсов $\arctg(a) + \arctg(b) = \arctg \frac{a+b}{1-a \cdot b}$ при любом k (без учета периода) следует

$$\alpha_k^* + \alpha_{1/k}^* = \arctg \sqrt{k} + \arctg \sqrt{\frac{1}{k}} = \arctg \frac{\sqrt{k} + \sqrt{\frac{1}{k}}}{1 - \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{1}{k}}} = \arctg \frac{\sqrt{k} + \sqrt{\frac{1}{k}}}{1 - \sqrt{1}} = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Графики функции $\beta(k, \alpha) - \alpha$ при $k = \frac{1}{4}$ (зеленая кривая) и $k = 4$ (синяя) показаны на Рис. 5. Легко заметить косую симметрию кривых относительно, во-первых, прямой $\beta(k, \alpha) - \alpha = -\frac{\pi}{2}$ (серым цветом), а во-вторых, прямой $\beta(k, \alpha) - \alpha = -2\alpha$, то есть $\beta(k, \alpha) = -\alpha$ (фиолетовым). На ней же лежат оба экстремума.

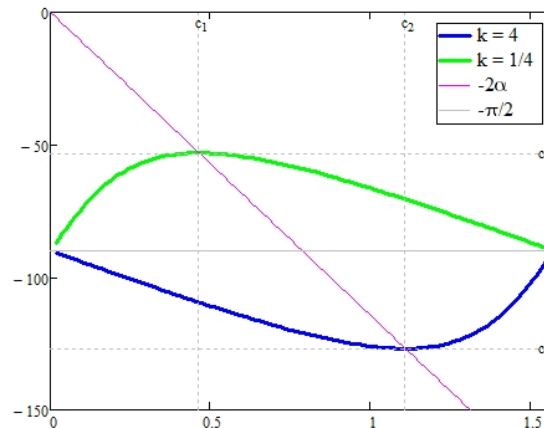


Рис. 5

Следует напомнить, что кривые зависимости угла наклона н.л. от угла наклона силовой линии (Рис. 2) при коэффициентах k , находящихся в обратной зависимости, имели, во-первых, общую ось собственной прямой симметрии (при том что у кривых на Рис. 5 собственной оси симметрии нет), а во-вторых, были взаимно прямо симметричны (кривые на Рис. 5 дважды взаимно кососимметричны).

В завершение отметим, что при достижении углов $\alpha_{1/4}^*$ и α_4^* на ребрах прямоугольника в четвертых квадрантах (точка А на Рис. 4, а и точка В на Рис. 4, б) возникает максимальное растягивающее напряжение. Наибольшие сжимающие напряжения того же модуля создаются на противоположных ребрах в первых квадрантах.

Автор благодарен А. Л. Сунчалиной за консультацию