Задача об измерении давления в сосуде с помощью тензорезистора. Три способа решения

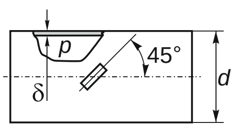

Рис. 1

В одном из комплектов экзаменационных билетов другого потока мной была обнаружена следующая задача (Рис. 1). Постановка задачи такова: на поверхность цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, наклеен тензорезистор, дающий показания ε. Найти давление в оболочке.

Исходные данные: $\delta = 1$ мм, $d = 40$ мм, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $E = 2{\cdot}10^5$ МПа.

Я счел задачу оригинальной и красивой и включил в свои билеты. Однако студенты, даже лучшие, встречали при ее решении большие трудности. Тогда я ее из билетов изъял.
Ниже приводится три совершенно разных подхода к ее решению. Первый способ, наиболее простой, короткий и изящный, используется в теоретической части лабораторной работы №10 для гораздо более сложного случая не одного, а трех тензометров. Второй способ предложен студентом-второкурсником МТ11 (2023-24 уч. г.) Александром Иваненковым, третий – его одногруппником Тимуром Мавлявиевым.

Напряженное состояние (НС) имеет вид Рис. 2. Напомним формулы для цилиндрической оболочки под давлением, называемые котельными формулами или формулами Мариотта:

$$\sigma_m = \frac{pd}{4\delta}; \qquad \sigma_t = \frac{pd}{2\delta} \tag{1}$$

Способ первый

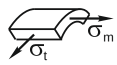

Рис. 2

Отрезок длиной l принадлежит прямой u (Рис. 3). Нужно найти деформацию вдоль оси u в зависимости от деформаций вдоль координатных осей и угла между ними и осью u. Свяжем систему координат с одним из концов отрезка и спроецируем его на оси:

$$l_x = l\cos\alpha; \qquad l_y = l\sin\alpha \to l = \frac{l_x}{\cos\alpha} = \frac{l_y}{\sin\alpha} \tag{2}$$

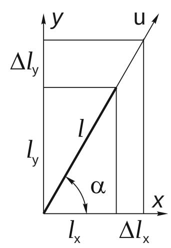

Рис. 3

По теореме Пифагора $l^2 = l_x^2 + l_y^2$. Дадим левой и правой частям приращение: $\Delta\left(l^2\right) = 2l\Delta l = 2l_x\Delta l_x + 2l_y\Delta l_y$. Разделим обе части на $2l^2$: $\frac{l}{l}\frac{\Delta l}{l} = \frac{l_x}{l}\frac{\Delta l_x}{l} + \frac{l_y}{l}\frac{\Delta l_y}{l}$. В левой части получили приращение длины l, отнесенное к ней же, то есть относительное удлинение, или, в привычных терминах, линейную деформацию вдоль оси u.
В правой части дважды заменим длину l в знаменателе каждой из формул на соответствующее выражение из (2):

$$\varepsilon_u = \frac{l_x}{l_x}\cos\alpha\frac{\Delta l_x}{l_x}\cos\alpha + \frac{l_y}{l_y}\sin\alpha\frac{\Delta l_y}{l_y}\sin\alpha = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\sin^2\alpha$$

В нашем случае ось u – ось, совпадающая с направлением базы тензорезистора, $x \equiv m$, $y \equiv t$, $\alpha = 45°$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \varepsilon_t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_t}{2} \tag{3}$$

Способ второй

Круговая диаграмма напряженного состояния, или просто «круги Мора», является одним из многочисленных способов наглядного представления (визуализации) НС. К сожалению, тема «Круги Мора» не входит в некоторые укороченные курсы лекций, так что придется дать краткое введение. Подробнее вопрос изложен, например, в источнике [1].

Каждой точке и ее малой окрестности в деформируемом теле, то есть каждому НС, соответствуют три круга (обычно изображают только верхний полукруг) на плоскости в координатах σ (абсцисса) и τ (ордината). В плоском НС (наша задача) от трех кругов остается один, причем абсциссы его пересечения с осью абсцисс равны главным напряжениям, в нашем случае – σ_m и σ_t (Рис. 4).

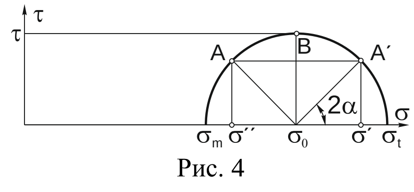

Рис. 4

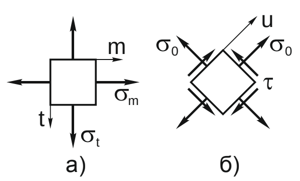

Рис. 5

Про повороте исходного НС (Рис. 5, *а*) на произвольный угол α вокруг оси r точки A и A´, соответствующие нормальным напряжениям текущего НС, будут двигаться по окружности (на диаграмме Мора углы удваиваются) и «встретятся» в точке B, где угол поворота осей равен 45°, при этом

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_m + \sigma_t}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{pd}{4\delta} + \frac{pd}{2\delta}\right) = \frac{3}{8}\frac{pd}{\delta}; \qquad \tau = \frac{\sigma_m - \sigma_t}{2} = R = \frac{1}{8}\frac{pd}{\delta} \tag{4}$$

где R – радиус окружности. Тогда НС будет иметь вид Рис. 5, *б*.

Найдем деформацию вдоль направления u по формуле обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}\left[\sigma_0 - \mu\sigma_0\right] = \frac{1-\mu}{E}\sigma_0 = \frac{3}{8}\cdot\frac{1-\mu}{E}\frac{pd}{\delta} = \varepsilon \tag{5}$$

Если же выводить выражение для произвольного угла α, то записываем

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\sigma' - \mu\sigma''\right] = \frac{1}{E}\left[\left(\sigma_0 + R\cos 2\alpha\right) - \mu\left(\sigma_0 - R\cos 2\alpha\right)\right] = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_m + \sigma_t\right)\left(1-\mu\right) + \left(\sigma_m - \sigma_t\right)\left(1+\mu\right)\cos 2\alpha\right]$$

Уточняя α = 45°, получаем

$$\varepsilon = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_m + \sigma_t\right)\left(1-\mu\right) + \left(\sigma_m - \sigma_t\right)\left(1+\mu\right)\cos 90°\right] = \frac{1}{2E}\left(\sigma_m + \sigma_t\right)\left(1-\mu\right) = \frac{1}{2E}\left(\sigma_m + \sigma_t - \mu\sigma_m - \mu\sigma_t\right)$$

Перегруппировываем слагаемые:

$$\varepsilon = \frac{1}{2E}\left(\sigma_m + \sigma_t - \mu\sigma_m - \mu\sigma_t\right) = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_m - \mu\sigma_t\right) + \left(\sigma_t - \mu\sigma_m\right)\right] = \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_t}{2} \tag{6}$$

Получена формула (3).

Способ третий

Матрицей поворота (или матрицей направляющих косинусов) в двумерном евклидовом пространстве называется матрица

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Тогда поворот тензора S на угол α осуществляется по формуле

$$S' = MSM^T \tag{7}$$

В исходном состоянии $S = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 \\ 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$. Подставляя матрицы S и M в формулу (7), получаем

$$S' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_t & 0 \\ 0 & \sigma_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_t\cos^2\alpha + \sigma_m\sin^2\alpha & \sigma_t\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_m\sin\alpha\cos\alpha \\ \sigma_t\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_m\sin\alpha\cos\alpha & \sigma_t\cos^2\alpha + \sigma_m\sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

В частном случае α = 45°

$$S' = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_m + \sigma_t}{2} & \dfrac{\sigma_m - \sigma_t}{2} \\ \dfrac{\sigma_m - \sigma_t}{2} & \dfrac{\sigma_m + \sigma_t}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Можно сделать вывод о том, что второй и третий способы пришли к одинаковым результатам: выражения (6) и (8) отличаются только формой записи.

Далее из формулы (5) получаем решение:

$$p = \frac{8E\varepsilon\delta}{3(1-\mu)d} = 2\text{ МПа} \tag{9}$$

Формулы (3) или (6) после подстановки зависимостей (1) приводят к формуле (9):

$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_t}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{E}\left(\sigma_m - \mu\sigma_t\right) + \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \mu\sigma_m\right)\right] = \frac{1}{2E}\frac{pd}{\delta}\left(\frac{1}{4} - \mu\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \mu\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{8E}\frac{pd}{\delta}\left(1 - 2\mu + 2 - \mu\right) = \frac{3(1-\mu)}{8E}\frac{pd}{\delta}$$

[1] Феодосьев В. И., «Сопротивление материалов», М., Наука, 1986